Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Esercizi di probabilità.

1. Si estraggono 6 carte a caso da un mazzo di 52, e si prendono in considerazione i seguenti eventi:
   A=”esattamente 2 delle carte estratte sono di cuori”
   B=”esattamente 3 delle carte estratte sono di picche”

   Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$.
   Dire se A e B sono eventi indipendenti.

2. Siano X ed Y due variabili aleatorie **indipendenti** tali che
$$E[X] = 2, \quad \mathrm{Var}(X) = 3$$
$$E[Y] = -1, \quad \mathrm{Var}(Y) = 1$$
   (i) Calcolare media e varianza della variabile aleatoria $X - Y$.
   (ii) Supponendo che X ed Y siano entrambe distribuite in modo gaussiano, calcolare $P(0 \leq X - Y \leq 1)$.

3. Sia X una variabile aleatoria discreta che assume i valori $-3, 0, 3$ con uguale probabilità, e sia $Y = X^2$.
   (i) Dire se X ed Y sono *indipendenti.*
   (ii) Dire se X ed Y sono *correlate.*

4. Un'azienda produce componenti elettronici in due diversi stabilimenti: il 40% dei componenti è prodotto dallo stabilimento A, il rimanente dallo stabilimento B. Si sa inoltre che,
   - tra i componenti prodotti da A quelli funzionanti sono il 96%.
   - tra i componenti prodotti da B quelli funzionanti sono il 92%.

   (A) Scegliamo ora un componente a caso, e constatiamo che è funzionante. Qual è la probabilità che esso sia prodotto dallo stabilimento B?

   (B) Scegliamo ora un componente a caso, e constatiamo che è difettoso. Qual è la probabilità che esso sia prodotto dallo stabilimento B?

5. Si stima che, in media, il tempo di attesa (misurato in secondi) delle telefonate che arrivano al call center di una compagnia sia uguale a $\mu = 55$. Supponiamo di modellizzare tale tempo medio mediante una variabile aleatoria continua X con legge esponenziale (i.e. con funzione densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ per $x > 0$ e nulla altrimenti).

   Quale valore dobbiamo assegnare al parametro λ ? Utilizzare questo modello per calcolare le quantità $\mathrm{Var}(X)$ e $P(X > \mu)$.

   Un utente che deve fare tre distinte telefonate a questo centralino modellizza il proprio tempo d'attesa complessivo come una variabile aleatoria $Y = X_1 + X_2 + X_3$ dove le X_i sono variabili aleatorie indipendenti di legge esponenziale (come al punto precedente).

   Calcolare le quantità $E[Y], \quad \mathrm{Var}(Y), \quad P(Y \geq E[Y])$.

6. Si chiama *legge di Laplace* di parametro λ quella individuata dalla densità $f(t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|}$. Calcolare media, varianza e funzione generatrice della legge di Laplace. Se X è una variabile aleatoria distribuita secondo la legge di Laplace, determinare la densità delle variabili aleatorie

$$aX, \quad |X|, \quad X^2$$

7. Una variabile aleatoria X segue una legge $\mathcal{N}(0, 1/4)$. Calcolare (usando le tavole),

$$P(X \leq 1), \quad P(X \geq 1.5), \quad P(0 \leq X \leq 1), \quad P(|X| \leq 0.4).$$

8. Siano X ed Y due variabili aleatorie discrete e **indipendenti**. Si sa inoltre che X assume i valori $-2, -1, 0, 1, 2$ con ugual probabilità, mentre Y assume i valori $-2, 2$ con ugual probabilità. Si definiscano le variabili aleatorie $S := X + Y$ e $T := XY$.

   (i) Calcolare media e varianza delle variabili aleatorie S e T.

   (ii) Calcolare il *coefficiente di correlazione* tra S e T.

   (iii) Dire se S e T sono indipendenti.

9. Il contenuto di nicotina delle sigarette prodotte da un'azienda viene modellizzato da una variabile aleatoria di media $\mu = 2.5mg$ e deviazione standard $\sigma = 0.5mg$.

   Calcolare la probabilità che la misura del contenuto medio di nicotina effettuata su un campione casuale di 100 sigarette produca un valore superiore a $2.6mg$.