Correzione del terzo compitino di Analisi 1 e 2

Del Nin Giacomo* Ferrigo Marco† Stra Federico‡

8 aprile 2014

Esercizio 1

Testo

Siano

$$f(x) = \int_x^{x+1/x} e^{-t^2} dt,$$
$$g(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Soluzione

Per prima cosa, studiamo le due funzioni f e g per vedere se ammettono limite individualmente. Vogliamo dimostrare che esse sono infinitesime e ci sono vari modi per farlo.

- Se chiamiamo Φ una primitiva di $t \mapsto e^{-t^2}$, per esempio la funzione

  $$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

  si ha che

$$f(x) = \Phi\left(x + \frac{1}{x}\right) - \Phi(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = \Phi(2x) - \Phi(x). \tag{1}$$

*delnin@mail.dm.unipi.it
†ferrigo@mail.dm.unipi.it
‡stra@mail.dm.unipi.it

Ora, è possibile mostrare che[1]

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

quindi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Phi(x+1/x) - \lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \Phi(2x) - \lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,$$

perché anche $x + 1/x \to \infty$ e $2x \to \infty$ per $x \to \infty$.

- Si può osservare che per ogni $x \geq 1$ vale

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \leq \int_x^\infty e^{-t^2} dt \leq \int_x^\infty te^{-t^2} dt = -\frac{e^{-t^2}}{2}\bigg|_x^\infty = \frac{e^{-x^2}}{2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

- Siccome la funzione e^{-t^2} è decrescente per $t > 0$, si possono fare le maggiorazioni

$$f(x) \leq \frac{1}{x}e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad g(x) \leq xe^{-x^2},$$

che, unitamente a $f(x), g(x) \geq 0$, mostrano che f e g sono infinitesime.

- Per mostrare che f è infinitesima, è sufficiente accorgersi che $e^{-t^2} \leq 1$, cosicché $f(x) \leq 1/x \to 0$. Per quanto riguarda g, si ha che $e^{t^2} \geq 1 + t^2$, da cui $e^{-t^2} \leq 1/(1 + t^2)$ e

$$g(x) \leq \int_x^i nfty \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t)\Big|_x^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \to 0.$$

Avendo determinato che il limite richiesto consiste in una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, si può procedere applicando il teorema di De L'Hopital. Poiché la funzione integranda è continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale e grazie alla regola di derivazione delle funzioni composte, dalla (1) si deduce che

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-(x+1/x)^2} - e^{-x^2} \qquad \text{e} \qquad g'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2}. \tag{2}$$

Quindi, il limite richiesto coincide con il seguente, a patto che esista:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2-2-1/x^2} - e^{-x^2}}{2e^{-4x^2} - e^{-x^2}} = \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-2-1/x^2} - 1}{2e^{-3x^2} - 1} = \\ &= \frac{1 \cdot e^{-2} - 1}{0 - 1} = 1 - e^{-2}.\end{aligned}$$

[1] Ad almeno uno studente questo fatto era noto, e uno ne ha pure fornito una dimostrazione. In ogni caso, non era strettamente necessario ricavare il valore esatto del limite, bensì bastava dimostrarne in qualche modo l'esistenza. NB: limite finito!

Commenti

- Un punto sottovalutato da molti studenti è stato mostrare che f e g sono infinitesime. Senza questa precisazione, non è consentito procedere applicando il teorema di De L'Hopital, perché ci si potrebbe non trovare di fronte a una forma indeterminata, nel qual caso il teorema risulta falso.
- Alcuni hanno inteso che l'estremo superiore di integrazione nella definizione di f fosse $\frac{x+1}{x}$ invece di $1+\frac{1}{x}$. In tal caso f non risultava più infinitesima, bensì
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \int_{\infty}^{1} e^{-t^2}dt = -\int_{1}^{\infty} e^{-t^2}dt < 0.$$
Di conseguenza, siccome g è infinitesima e positiva, si ha che $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.
Se si procedeva frettolosi e si provava ad applicare De l'Hopital anche in questo caso, si otteneva invece che $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, risultato scorretto.
- Un errore abbastanza diffuso è stato sbagliare f' e g'. Se $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua e $a, b\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sono derivabili, posto
$$H(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} h(t)dt,$$
si ha che
$$H'(x) = h(b(x))b'(x) - h(a(x))a'(x).$$
Nel nostro caso, per calcolare f' si prende $h(t) = e^{-t^2}$, $a(x) = x$, $b(x) = x+1/x$, per calcolare g' si prende $h(t) = e^{-t^2}$, $a(x) = x$, $b(x) = 2x$ e si ottengono le formule (2).
Alcuni hanno dimenticato i fattori $b'(x)$ e $a'(x)$. Questa dimenticanza porta comunque al risultato corretto, tuttavia si tratta di un caso fortuito e in altre situazioni le cose possono andare assai diversamente. Ad ogni modo, sbagliare la derivata di una funzione composta costituisce un errore.

Valutazione

A grandi linee:

- mostrare che f e g sono infinitesime: 3 punti;
- calcolare correttamente f' e g': 3 punti;
- svolgimento corretto del limite risultante: 4 punti.

Esercizio 2

Testo

Calcolare, se esiste:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + 2x^{-2}\log(\cos x) - \sin x - x^2/3}{x - \sin x}$$

Soluzione

Utilizzerò gli sviluppi di Taylor in $x_0 = 0$. Prima sviluppiamo il denominatore:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathfrak{o}(x^3).$$

Siccome abbiamo ottenuto un resto di grado 3, cerchiamo di ottenerlo anche al numeratore.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \mathfrak{o}(x^3) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \mathfrak{o}(x^3). \end{aligned}$$

Per arrivare al grado 3 anche nel termine $2x^{-2}\log(\cos x)$, dovremo sviluppare $\log(\cos x)$ almeno fino al quinto ordine. Intanto occupiamoci della funzione più interna:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathfrak{o}(x^5)$$

Quindi ottengo:

$$\begin{aligned} \log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathfrak{o}(x^5)\right) = \\ = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathfrak{o}(x^5) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathfrak{o}(x^5)\right)^2 + \\ + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathfrak{o}(x^5)\right)^3 + \mathfrak{o}\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \mathfrak{o}(x^5)\right)^3\right) \end{aligned}$$

Che diventa:

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{8}x^4 + \mathfrak{o}(x^5) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + \mathfrak{o}(x^5)$$

considerando solo i termini di grado minore o uguale a 5. Dunque

$$\frac{2}{x^2}\log(\cos x) = -1 - \frac{1}{6}x^2 + \mathfrak{o}(x^3).$$

Osserviamo che

$$\frac{\mathfrak{o}(x^5)}{x^2} = \mathfrak{o}(x^3)$$

in quanto:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathfrak{o}(x^5)}{x^2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathfrak{o}(x^5)}{x^5} = 0.$$

A questo punto il limite originale diventa:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 - \frac{x^2}{6} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{3} + \mathfrak{o}(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \mathfrak{o}(x^3)} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + \mathfrak{o}(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \mathfrak{o}(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{\mathfrak{o}(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{6} + \frac{\mathfrak{o}(x^3)}{x^3}} = 2. \end{aligned}$$

Osservazioni

- Un modo efficace anche se un po' più dispendioso per sviluppare con Taylor la funzione $\log(\cos x)$ era fare le prime cinque derivate e poi calcolarle in 0.
- Un errore molto comune è stato sviluppare il coseno solo fino al secondo/terzo ordine. In questo modo si otteneva:

  $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^3)$$

  Poi si sviluppa il logaritmo fino al secondo ordine:

  $$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^3)\right) =$$

  $$= -\frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^3) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^3)\right)^2 + \mathfrak{o}\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^3)\right)^2\right)$$

  Che diventa:

  $$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \mathfrak{o}(x^3) \tag{3}$$

  Questo è uno snodo cruciale, da qui in poi possiamo proseguire per due strade: una corretta e una no, ma che comunque non portano alla soluzione. Esploriamole:

  1. Evidentemente da (3) ora si ottiene:

     $$-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \mathfrak{o}(x^3) = -\frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^3)$$

     in quanto $-\frac{1}{8}x^4$ è un $\mathfrak{o}(x^3)$, e perciò abbiamo perso delle informazioni. Dunque:

     $$\frac{2}{x^2}(\log(\cos x)) = \frac{2}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^3)\right) = -1 + \mathfrak{o}(x)$$

     Vediamo cosa succede andando a sostituire nel limite originale. Siccome mi compare un $\mathfrak{o}(x)$, svilupperò tutto fino al primo ordine:

     $$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 1 - x - \frac{x^2}{3} + \mathfrak{o}(x)}{\frac{x^3}{6} + \mathfrak{o}(x^3)} =$$

     $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathfrak{o}(x)}{\frac{x^3}{6} + \mathfrak{o}(x^3)}.$$

     Cosa si può dire su questo limite? Niente! Arrivare a questo punto ci dice che dovevamo sviluppare con Taylor fino a un qualche ordine successivo.

2. Si possono effettuare i seguenti passaggi:
   ho trovato
$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \mathfrak{o}(x^3).$$
   Quando vado a moltiplicare ottengo (qui sta l'errore cruciale!):
$$\frac{2}{x^2}\log(\cos x) = -1 - \frac{1}{8}x^2 + \mathfrak{o}(x^3).$$
   Ovviamente è falso:
$$\frac{\mathfrak{o}(x^3)}{x^2} = \mathfrak{o}(x^3)$$
   ma molti lo hanno fatto. Vediamo cosa succedeva dopo.
   Sostituisco e ottengo:
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 - \frac{x^2}{8} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{3} + \mathfrak{o}(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \mathfrak{o}(x^3)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{24} + \frac{x^3}{3} + \mathfrak{o}(x^3)}{\frac{x^3}{6} + \mathfrak{o}(x^3)} = \infty$$
   Ovvero il limite non esiste, o meglio ancora fa $\pm\infty$ per $x \to 0^{\pm}$. Il risultato è però viziato dall'errore precedente, ed è infatti sbagliato.

Quindi sviluppare il coseno fino al terzo grado era un errore nel senso che non portava alla soluzione (caso 1). Il grosso errore, che portava a dare il risultato ∞ stava nella cattiva gestione degli $\mathfrak{o}$ piccoli.

- Come vi è stato spiegato a lezione vi converrebbe, almeno all'inizio, pensare in questi termini: (faccio un esempio):
$$\sin x = x + f(x)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + g(x)$$
  e so che $f(x)$ è un $\mathfrak{o}(x^2)$, e che $g(x)$ è un $\mathfrak{o}(x^2)$, ovvero conosco una certa proprietà di f e g. f e g sono ben definite, ed è fondamentale la loro presenza per dare senso a ciò che scrivo. Vediamo alcuni passaggi leciti per sviluppare questa scrittura:
$$\log(1+\sin x) = \log(1 + x + f(x)) \qquad = x + f(x) - \frac{(x+f(x))^2}{2} + g\left((x+f(x))^2\right)$$
$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin x^2}{2} + g(\sin x) \quad = x + f(x) - \frac{(x+f(x))^2}{2} + g\left((x+f(x))^2\right)$$
  posso scegliere due strade (prima sviluppo una o l'altra funzione), ma ciò a cui arrivo è:
$$x + f(x) - \frac{(x+f(x))^2}{2} + g\left((x+f(x))^2\right).$$

Vale la pena osservare una cosa:

$$g\left((x+f(x))^2\right)_{|(x=-\pi/2)} = -\frac{1}{2} + \log 2.$$

ha perfettamente senso ed è corretto! Nonostante a noi interessi il comportamento di f e g vicino a 0, queste sono funzioni ben definite anche altrove.

Comunque sia:

$$x + f(x) - \frac{(x+f(x))^2}{2} + g\left((x+f(x))^2\right) =$$
$$x + f(x) - \frac{x^2}{2} - \frac{f(x)^2}{2} - xf(x) + g\left((x+f(x))^2\right) = x - \frac{x^2}{2} + h(x)$$

dove $h(x)$ è un $\mathfrak{o}(x^2)$, poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{f(x)^2}{2} - xf(x) + g\left((x+f(x))^2\right)}{x^2} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \frac{f(x)^2}{2} - xf(x)}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{g\left((x+f(x))^2\right)}{(x+f(x))^2} \cdot \frac{(x+f(x))^2}{x^2} = 0.$$

Quando tutto ciò vi è chiaro, potete anche non stare a scrivere, f g h, ma direttamente $\mathfrak{o}(x^{\cdots})$.

Esercizio 3

Testo

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti, per $\alpha = 2$ e $\alpha = 1/2$:

$$\lim_{k\to+\infty} k^\alpha \int_0^{\pi/2} x e^{-kx^2} dx,$$
$$\lim_{k\to+\infty} k^\alpha \int_0^{\pi/2} \sin(x) e^{-kx^2} dx.$$

Soluzione

a) Osserviamo che il primo integrale si calcola esplicitamente, notando che

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-kx^2}\right) = -2kxe^{-kx^2}$$

e dunque

$$\int_0^{\pi/2} xe^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2k}\int_0^{\pi/2} -2kxe^{-kx^2} dx = -\frac{1}{2k}\int_0^{\pi/2} \frac{d}{dx}\left(e^{-kx^2}\right) dx =$$
$$= -\frac{1}{2k}\left[e^{-kx^2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2k}\left(1 - e^{-k\frac{\pi^2}{4}}\right).$$

Quindi
$$\lim_{k\to\infty} k^\alpha \int_0^{\pi/2} xe^{-kx^2}dx = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{\alpha-1}}{2}\left(1-e^{-k\frac{\pi^2}{4}}\right).$$
Ora osserviamo che
$$\lim_{k\to\infty} 1-e^{-k\frac{\pi^2}{4}} = 1$$
in quanto l'esponenziale tende a zero, e dunque
$$\lim_{k\to\infty} k^\alpha \int_0^{\pi/2} xe^{-kx^2}dx = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{\alpha-1}}{2}\left(1-e^{-k\frac{\pi^2}{4}}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{k^{\alpha-1}}{2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b)Per risolvere il secondo integrale cerchiamo di usare il teorema del confronto tra integrali sfruttando i risultati della prima parte. Dimostriamo prima che per $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vale
$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$
Per dimostrare la prima disuguaglianza notiamo che $\frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x \leq 0$ in $[0, \pi/2]$, quindi in questo intervallo la funzione $\sin x$ è concava. I valori della funzione $\sin x$ sono dunque maggiori o uguali dei valori assunti dalla retta passante per i punti $(0, 0)$ e $(\pi/2, 1)$, cioè
$$\sin x \geq 0 + \frac{2}{\pi}(x-0) = \frac{2}{\pi}x.$$
Per dimostrare la seconda si può per esempio considerare la funzione $f(x) = x - \sin x$, e dimostrare che è sempre ≥ 0. Infatti vale $f(0) = 0$ ed inoltre
$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x$$
per cui f è crescente, e siccome in zero vale zero risulta $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$.

A questo punto possiamo quindi osservare che, essendo e^{-kx^2} sempre positivo, vale
$$\frac{2}{\pi}xe^{-kx^2} \leq \sin xe^{-kx^2} \leq xe^{-kx^2}$$
e dunque, considerando anche k positivo (che è legittimo in quanto faremo il limite per $k \to \infty$), otteniamo
$$\frac{2}{\pi}k^\alpha \int_0^{\pi/2} xe^{-kx^2} \leq k^\alpha \int_0^{\pi/2} \sin xe^{-kx^2} \leq k^\alpha \int_0^{\pi/2} xe^{-kx^2}.$$
Ora per il caso $\alpha = 2$ utilizziamo la prima disuguaglianza per ottenere
$$\lim_{k\to\infty} k^2 \int_0^{\pi/2} \sin xe^{-kx^2}dx \geq \lim_{k\to\infty} k^2 \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi}xe^{-kx^2}dx = +\infty.$$
da cui anche il limite da calcolare risulta $+\infty$.
Per il caso $\alpha = \frac{1}{2}$ utilizziamole entrambe per ottenere
$$\frac{2}{\pi}\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} xe^{-kx^2}dx \leq \lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} \sin xe^{-kx^2}dx \leq \lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} xe^{-kx^2}dx$$
e siccome entrambi i limiti esterni fanno zero, come calcolato al punto a), anche quello cercato risulta uguale a zero.

Osservazioni

- Alcuni hanno provato a svolgere l'integrale col seno integrando per parti due volte. Ci sono stati due casi (entrambi inconcludenti): nel primo viene integrata sempre la parte col seno o col coseno, e derivata quella con l'esponenziale:

$$\begin{aligned}\int \sin x e^{-kx^2} dx &= -\cos x e^{-kx^2} - \int -\cos x(-2kx)e^{-kx^2} dx = \\ &= -\cos x e^{-kx^2} + \left[\sin x 2kx e^{-kx^2} - \int \sin x e^{-kx^2}(2k - 4kx^2)dx\right] = \\ &= -\cos x e^{-kx^2} + \sin x 2kx e^{-kx^2} - 2k\int \sin x e^{-kx^2} + \int \sin x e^{-kx^2} 4kx^2 dx\end{aligned}$$

  da cui

$$\int \sin x e^{-kx^2} dx = \frac{1}{2k+1}\left(-\cos x e^{-kx^2} + \sin x 2kx e^{-kx^2} + \int \sin x e^{-kx^2} 4kx^2 dx\right).$$

  In questo modo, tuttavia, rimaniamo con l'integrale a destra che è semmai ancora più complicato di quello di partenza (alcuni si sono dimenticati il fattore x^2, o l'hanno portato illegittimamente fuori dall'integrale, e dunque hanno ottenuto un risultato sbagliato).
  Nel secondo modo di procedere invece viene dapprima integrato il seno, e poi derivato il coseno risultante. In questo modo tuttavia si ritorna esattamente all'integrale di partenza, ottenendo solamente l'espressione $0 = 0$.

- Alcuni hanno sviluppato l'esponenziale con Taylor. Ci sono stati due casi anche qui: si poteva sviluppare nella variabile x oppure in k. In generale entrambi gli approcci sono stati applicati non correttamente, principalmente perché è stato studiato solamente l'andamento rispetto ad una delle due variabili. Infatti sviluppando in una delle due variabili i resti sono stati indicati solo come $o(x)$ oppure $o(k)$, dimenticandosi così della dipendenza dall'altra variabile; in questo caso entrambe le variabili giocavano un ruolo fondamentale, in quanto comparivano sia un limite in k sia un integrale in x.
  Lo sviluppo nella variabile k è concettualmente meno corretto in quanto, sviluppando per esempio in $k = 0$, otteniamo un'espressione del tipo

$$\lim k^\alpha \int_0^{\pi/2} (1 - kx^2 + o(k))dx$$

  oppure

$$\lim k^\alpha \int_0^{\pi/2} \sin x(1 - kx^2 + o(k))dx$$

  Ora il termine $o(k)$ ci dà informazioni sull'andamento di e^{-kx^2} solo per $k \to 0$, ed in particolare vale $\lim_{k\to 0} \frac{o(k)}{k} = 0$. Tuttavia non abbiamo alcuna informazione sul comportamento di $o(k)$ per $k \to \infty$. Inoltre stiamo qui tralasciando anche il fatto che c'è un integrale nella variabile x di mezzo, come già detto. Infatti $o(k)$ in realtà è una funzione anche nella variabile x, e dunque non è chiaro a prima vista come si comporta una volta integrata.

- Alcuni hanno invece sviluppato il seno con Taylor. Questa strada è più corretta, però è difficile concludere. Si ottiene, per esempio al terzo ordine:

$$
\begin{aligned}
k^\alpha \int \sin x e^{-kx^2} dx &= k^\alpha \int \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) e^{-kx^2} dx = \\
&= k^\alpha \int x e^{-kx^2} dx - k^\alpha \int \frac{x^3}{3} e^{-kx^2} dx + k^\alpha \int o(x^3) e^{-kx^2} dx
\end{aligned}
$$

Ora il primo pezzo è esattamente l'integrale del primo punto; il secondo pezzo si risolve per parti:

$$
\begin{aligned}
\int x^3 e^{-kx^2} dx &= \int (x^2) \left(x e^{-kx^2} \right) dx = x^2 \frac{e^{-kx^2}}{-2k} + \frac{1}{2k} \int 2x e^{-kx^2} dx = \\
&= -\frac{x^2}{2k} e^{-kx^2} + \frac{1}{k} \frac{e^{-kx^2}}{-2k}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
-k^\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{x^3}{3} e^{-kx^2} dx &= \left[\frac{-k^\alpha}{3} \left(-\frac{x^2}{2k} e^{-kx^2} + \frac{1}{k} \frac{e^{-kx^2}}{-2k} \right) \right]_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{\pi^2}{24} k^{\alpha-1} e^{-k\pi^2/4} - \frac{k^{\alpha-2}}{6} e^{-k\pi^2/4} + \frac{k^{\alpha-2}}{6}
\end{aligned}
$$