Correzione del quarto compitino di Analisi 1 e 2

Del Nin Giacomo* Ferrigo Marco† Stra Federico‡

30 maggio 2014

Esercizio 1

Testo

Scrivere le soluzioni dell'equazione

$$u'' + 2u' + u = e^{-t} \log t$$

Soluzione

Trovo le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$u'' + 2u' + u = 0. \tag{1}$$

Il polinomio associato all'operatore differenziale è:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

quindi la radice doppia di tale polinomio è $\lambda = -1$. Perciò le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono combinazioni lineari delle due funzioni

$$e^{-t},\ t\,e^{-t}.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione, sfruttiamo il metodo di *variazione delle costanti arbitrarie*. Ovvero cerchiamo una soluzione del tipo:

$$v(t) = a(t)\,e^{-t} + b(t)\,te^{-t}.$$

Facciamo i conti:

$$\begin{aligned} v'(t) &= a'(t)\,e^{-t} + b'(t)\,te^{-t} - a(t)\,e^{-t} - b(t)\,te^{-t} + b(t)\,e^{-t} \\ &= -\,a(t)\,e^{-t} - b(t)\,te^{-t} + b(t)\,e^{-t}, \end{aligned}$$

*delnin@mail.dm.unipi.it
†ferrigo@mail.dm.unipi.it
‡stra@mail.dm.unipi.it

ponendo, come previsto:

$$a'(t)\, e^{-t} + b'(t)\, te^{-t} = 0, \quad a'(t) + b'(t)\, t = 0. \tag{2}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} v''(t) &= -\, a'(t)\, e^{-t} - b'(t)\, te^{-t} + b'(t)\, e^{-t} + a(t)\, e^{-t} - 2b(t)\, e^{-t} + b(t)\, te^{-t} \\ &= b'(t)\, e^{-t} + a(t)\, e^{-t} - 2b(t)\, e^{-t} + b(t)\, te^{-t}, \end{aligned}$$

in cui si è sfruttata nuovamente (2).

Poniamo infine:

$$v'' + 2v' + v = b'(t)\, e^{-t} = e^{-t} \log t, \quad b'(t) = \log t. \tag{3}$$

Le equazioni (2) e (3) mi danno un sistema di cui trovo una soluzione (gli integrali si calcolano facilmente per parti):

$$\begin{cases} a'(t) + b'(t)\, t = 0 \\ b'(t) = \log t \end{cases} \quad \begin{cases} a'(t) = -t \log t \\ b'(t) = \log t \end{cases} \quad \begin{cases} a(t) = -\frac{t^2}{2} \log t + \frac{t^2}{4} \\ b(t) = t \log t - t \end{cases}$$

Quindi ho trovato la soluzione particolare

$$\left(-\frac{t^2}{2} \log t + \frac{t^2}{4} \right) e^{-t} + (t \log t - t)\, te^{-t} = e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} \log t - \frac{3}{4} t^2 \right).$$

Le soluzioni dell'equazione studiata sono somma della soluzione particolare e di una soluzione dell'omogenea, e quindi della forma:

$$e^{-t} \left(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2} \log t - \frac{3}{4} t^2 \right) \quad \text{con } c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Punteggio

Ho cercato di attribuire $0 - 3$ punti per la soluzione dell'omogenea, $0 - 4$ punti per il metodo della variazione delle costanti ed i relativi conti, $0 - 3$ punti per la corretta scrittura della soluzione, cioè il rimettere insieme i pezzi.

Come al solito, i voti finali possono avere una variazione di ± 2 da questa griglia.

Osservazioni

Nessuna. L'esercizio è stato svolto bene dalla maggior parte di chi l'ha affrontato. I pochi errori erano di conto, sviste, o passaggi ricopiati male.

Esercizio 2

Testo

Sia data l'equazione differenziale

$$y' = |y| + x^2.$$

(i) Dire dove sono definite le soluzioni massimali.

(ii) Scrivere la soluzione del problema di Cauchy con dato $y(a) = 0$, con $a \in \mathbb{R}$. Dire per quali valori di a tale soluzione è di classe $C^2(\mathbb{R})$.

(iii) Dire se esistono soluzioni dell'equazione definite su tutto $\mathbb{R}$ sempre positive.

Soluzione

Punto (i)

La funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = |y| + x^2$ è continua su tutto il dominio di definizione e lipschitziana in y (per ogni x fissato), infatti vale

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \Big||y_1| - |y_2|\Big| \leq |y_1 - y_2|$$

per la disuguaglianza triangolare. Sono quindi verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni. Inoltre, per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}$ si ha che

$$|f(x, y)| \leq |y| + \max_{x \in K} x^2 \qquad \forall (x, y) \in K \times \mathbb{R},$$

quindi, per un altro teorema visto in classe, le soluzioni dell'equazione differenziale sono prolungabili a tutto $\mathbb{R}$, ovvero le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Punto (ii)

Osserviamo che $y'(x) \geq 0$ per ogni x, quindi $y(x) \leq 0$ per $x \leq a$ e $y(x) \geq 0$ per $x \geq a$. Dividiamo dunque la risoluzione in due casi.

- Consideriamo la porzione di dominio data da $x \leq a$. Per quanto osservato, qui la nostra soluzione soddisfa

$$y'(x) = -y(x) + x^2. \tag{4}$$

  L'equazione omogenea associata $y'(x) = -y(x)$ ha come soluzioni $C_1 e^{-x}$, al variare di $C_1 \in \mathbb{R}$. Dobbiamo determinare ora una soluzione particolare di (4). Per farlo possiamo seguire due strade.

  - Variazione della costante arbitraria. Si cerca una soluzione della forma $C(x)e^{-x}$. Sostituendo in (4) si trova

  $$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} = -C(x)e^{-x} + x^2,$$

    da cui $C'(x) = x^2 e^x$, che integrata per parti fornisce come primitiva $C(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$. La soluzione particolare che si ottiene è dunque $(x^2 - 2x + 2)e^x e^{-x} = x^2 - 2x + 2$.

  - Dal momento che il termine noto è un polinomio, si cerca una soluzione in forma polinomiale (dello stesso grado). Sostituendo $y(x) = ax^2 + bc + c$ in (4) si trova $2ax + b = (1 - a)x^2 - bx - c$, da cui $a = 1$, $b = -2a = -2$ e $c = -b = 2$. Si è così ritrovata la soluzione particolare $x^2 - 2x + 2$.

In definitiva, le soluzioni di (4) sono

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + C_1 e^{-x} \qquad \text{al variare di } C_1 \in \mathbb{R}.$$

Per determinare la costante C_1, basta imporre la condizione di Cauchy assegnata $y(a) = 0$, da cui si ricava $C_1 = -(a^2 - 2a + 2)e^a$ e finalmente

$$y(x) = (x^2 - 2x + 2) - (a^2 - 2a + 2)e^{a-x} \qquad \text{per } x \leq a.$$

- In maniera analoga si procede sulla semiretta $x \geq a$. Qui la soluzione y è non negativa, pertanto soddisfa

$$y'(x) = y(x) + x^2. \tag{5}$$

Le soluzioni dell'omogenea associata sono $C_2 e^x$ con $C_2 \in \mathbb{R}$ e una soluzione particolare, che si può trovare come sopra, è $-(x^2 + 2x + 2)$. La soluzione generale pertanto è

$$y(x) = -(x^2 + 2x + 2) + C_2 e^x \qquad \text{al variare di } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo $y(a) = 0$ si ricava $C_2 = (a^2 + 2a + 2)e^{x-a}$ e

$$y(x) = -(x^2 + 2x + 2) + (a^2 + 2a + 2)e^{x-a} \qquad \text{per } x \geq a.$$

Mettendo insieme i pezzi, la soluzione del problema di Cauchy con dato $y(a) = 0$ è

$$y(x) = \begin{cases} (x^2 - 2x + 2) - (a^2 - 2a + 2)e^{a-x} & x \leq a, \\ -(x^2 + 2x + 2) + (a^2 + 2a + 2)e^{x-a} & x \geq a. \end{cases}$$

Studiamo ora la regolarità della soluzione trovata. y è chiaramente $C^1(\mathbb{R})$, per il fatto stesso che risolve l'equazione differenziale.[1] Inoltre y è C^∞ su $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Per stabilire quando y è $C^2(\mathbb{R})$ bisogna allora studiare l'esistenza e la continuità della derivata seconda nel punto a. Abbiamo che nell'aperto $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ vale

$$y''(x) = \begin{cases} 2 - (a^2 - 2a + 2)e^{a-x} & x < a, \\ -2 + (a^2 + 2a + 2)e^{x-a} & x > a. \end{cases}$$

La derivata seconda y'' esiste in a ed è continua se e solo se

$$\lim_{x \to a^-} y''(x) = \lim_{x \to a^+} y''(x),$$

ovvero se e solo se

$$2 - (a^2 - 2a + 2) = -2 + (a^2 + 2a + 2),$$

che vale se e solo se $a = 0$.

[1] Se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua è y risolve $y'(x) = f(x, y(x))$, allora *per definizione* y deve essere derivabile ovunque almeno una volta. In particolare y è continua e dunque, per la continuità della funzione composta, risulta che anche $y'(x) = f(x, y(x))$ è continua, ovvero y è C^1.

Punto (iii)

Supponiamo che y sia una soluzione sempre positiva di $y' = |y| + x^2$. Allora y soddisfa $y' = y + x^2$. Questa altro non è che l'equazione (5), le cui soluzioni, come già trovato, sono

$$y(x) = -(x^2 + 2x + 2) + C_2 e^x \qquad \text{al variare di } C_2 \in \mathbb{R}.$$

Si vede facilmente che nessuna di queste è sempre positiva (per nessuna scelta del parametro C_2), perché

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty.$$

Alternativamente, si può procedere nel seguente modo. Siccome $y' \geq 0$, ogni soluzione è debolmente crescente. Allora esiste finito

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \geq 0. \tag{6}$$

Del resto abbiamo che

$$\liminf_{x \to -\infty} y'(x) = \liminf_{x \to -\infty} \left(|y'(x)| + x^2 \right) \geq \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$$

e questo è in contraddizione con (6).[2]

Esercizio 3

Testo

Dire per quali valori dei parametri $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è finito:

$$\int_0^{+\infty} e^{2x} \arctan(x^2 + 2) \log(x) \sin(x^{-\beta} e^{-\alpha x}) dx$$

Soluzione

La funzione integranda è continua su $(0, +\infty)$, quindi sugli intervalli compatti $[a, b]$ con $0 < a < b < +\infty$ è integrabile. Dobbiamo quindi studiare il comportamento per $x \to 0$ e $x \to \infty$. Possiamo quindi per esempio considerare gli integrali $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)dx$, con c scelto a piacere in $(0, +\infty)$. L'integrale di partenza è finito se e solo se lo sono entrambi questi ultimi.
Notiamo come prima cosa che, per $x \in (0, +\infty)$, $\arctan(x^2 + 2)$ è compresa fra $\arctan(2)$ e $\pi/2$, entrambe costanti positive. Dunque per il criterio del confronto questo termine non influenza la convergenza dell'integrale, e può essere trascurato.

[2] I dettagli di perché questo sia assurdo sono lasciati per esercizio. L'ingrediente fondamentale è il teorema di Lagrange e probabilmente si tratta di un ragionamento visto varie volte a lezione. Osservate tuttavia che non è vero in generale che $\lim_{x \to -\infty} y(x) \in \mathbb{R}$ implica $\lim_{x \to -\infty} y'(x) = 0$. Come controesempio si può considerare $y(x) = \sin(x^2)/x$. Diventa vero però se y è monotona, come nel nostro caso.

- **Caso 1:** intervallo $[0,1]$.
Osserviamo che il seno è in modulo sempre minore o uguale a 1, e per $x \in [0,1]$ vale $e^{2x} \le e^2$. Dunque

$$\left|\int_0^1 e^{2x}\log(x)\sin(x^{-\beta}e^{-\alpha x})dx\right| \le \int_0^1 \left|e^{2x}\log(x)\sin(x^{-\beta}e^{-\alpha x})dx\right| \le$$
$$\int_0^1 e^2|\log x|dx = -e^2\int_0^1 \log(x)dx = e^2$$

infatti
$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{t\to 0}\int_t^1 \log x dx = x(\log x - 1)\Big|_t^1 = -1$$

poichè
$$\lim_{t\to 0} t\log t = 0.$$

Quindi in questo intervallo l'integrale converge per ogni scelta dei parametri $\alpha > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

- **Caso 2:** intervallo $[c,+\infty]$.
Osserviamo che
$$\lim_{x\to\infty} x^{-\beta}e^{-\alpha x} = 0$$
in quanto $\alpha > 0$ per ipotesi e dunque il fattore esponenziale domina (si può vedere per esempio con de l'Hopital). Quindi, ponendo $y = x^{-\beta}e^{-\alpha x}$, otteniamo
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^{-\beta}e^{-\alpha x})}{x^{-\beta}e^{-\alpha x}} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 1.$$
Per il teorema del confronto asintotico tra integrali possiamo quindi studiare l'integrale
$$\int_c^{+\infty} e^{2x}\log(x)x^{-\beta}e^{-\alpha x}dx = \int_c^{+\infty} e^{(2-\alpha)x}\log(x)x^{-\beta}dx$$
che converge se e solo se converge quello di partenza. Notiamo che a patto di prendere $x \ge 1$ l'integrando è una funzione positiva. Ora si presentano tre casi:

  - $\alpha > 2$
  In questo caso l'esponenziale è negativo, e dunque ci aspettiamo che domini sugli altri fattori e l'integrale converga. Per vedere ciò poniamo $\alpha = 2 + \delta$ con $\delta > 0$ e dividiamo l'esponenziale $e^{(2-\alpha)x} = e^{-\delta x}$ in due fattori, uno dei quali serve a far trascurare il logaritmo e la potenza $x^{-\beta}$, mentre l'altro serve a far convergere l'integrale, per esempio
  $$\int_c^{+\infty} e^{-\frac{\delta}{2}x}\left(e^{-\frac{\delta}{2}x}\log(x)x^{-\beta}\right)dx.$$

Ora

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{\delta}{2}x}\log(x)x^{-\beta} = 0.$$

Scegliendo c in modo che l'argomento del limite sia minore di 1 per $x \geq c$ possiamo quindi scrivere

$$\int_c^{+\infty} e^{-\frac{\delta}{2}x}\left(e^{-\frac{\delta}{2}x}\log(x)x^{-\beta}\right)dx \leq \int_c^{+\infty} e^{-\frac{\delta}{2}x}dx,$$

ma essendo $\delta > 0$ questo converge.
Quindi per $\alpha > 2$ l'integrale converge per ogni β.

- $\alpha = 2$
  In questo caso l'integrale diventa

$$\int_c^{+\infty} \log(x)x^{-\beta}dx.$$

  Se $\beta \leq 1$ allora possiamo fare la maggiorazione $\log(x)x^{-\beta} \geq x^{-1}$ per $x \geq e$, e quindi l'integrale diverge perché $\int_c^{+\infty} x^{-1}dx$ diverge per qualunque $c > 0$.
  Se invece $\beta > 1$ possiamo, similmente a quanto già fatto, scrivere $\beta = 1+\varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, e considerare

$$\int_c^{+\infty} x^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}\left(x^{-\frac{\varepsilon}{2}}\log(x)\right)dx.$$

  Ora $\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{\varepsilon}{2}}\log(x) = 0$ (si può vedere con de l'Hopital) e quindi a patto di scegliere c abbastanza grande (in modo tale che $x^{-\frac{\varepsilon}{2}}\log(x) \leq 1$ per $x \geq c$) possiamo maggiorare il nostro integrale con

$$\int_c^{+\infty} x^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}dx;$$

  che converge perché $\varepsilon > 0$.
- $\alpha < 2$
  In questo caso, poiché l'esponenziale risulta crescente, abbiamo che $\lim_{x\to\infty} e^{(2-\alpha)x}x^{-\beta}\log(x) = +\infty$, e dunque l'integrale diverge perché l'integrando tende a infinito.

Riassumendo abbiamo dimostrato che i valori per cui l' integrale converge sono:

- $\alpha > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$
- $\alpha = 2$, $\beta > 1$

Commenti ed errori

- Nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione integranda può assumere valori negativi a causa della presenza del logaritmo e del seno. Quindi non basta maggiorare l'integrale per dire che converge, ma bisogna maggiorare il suo modulo.

- Nel limite $x \to 0$ l'argomento del seno tende a zero solo per $\beta < 0$, quindi si può sostituire il seno con il suo argomento solo in questo caso; bisogna quindi distinguere i casi $\beta < 0$ e $\beta \geq 0$.

- Qualcuno ha tentato di usare questo criterio (scorretto): se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1/x} = 0$$

allora f va come una potenza $1/x^\delta$ con $\delta > 1$ (e quindi il suo integrale sugli intervalli $[c, +\infty]$ converge). Questo non è vero, come mostra la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x\log(x)}.$$

Infatti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\log(x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0$$

eppure

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\log(x)} dx = \int_e^{+\infty} (\log(\log(x)))'\, dx = \log(\log(x))\big|_e^{\infty} = +\infty$$

- I punteggi sono stati suddivisi più o meno come segue:
  - Discussione del caso $x \to 0$: 4 punti.
  - Discussione del caso $x \to \infty$: 6 punti, suddivisi a loro volta in tre per le discussioni dei casi $\alpha > 2$, $\alpha = 2$ e $\alpha < 2$.