Correzione del primo compitino di Analisi 1 e 2
A.A. 2014/2015

Luca Ghidelli, Giovanni Paolini, Leonardo Tolomeo

15 dicembre 2014

Esercizio 1

Testo. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}.$$

Soluzione. Al denominatore compare la somma dei primi n numeri pari, che può essere riscritta come

$$2+4+6+\cdots+2n = 2\cdot(1+2+3+\cdots+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Al numeratore compare invece la somma dei primi n numeri dispari, che può essere calcolata sommando e sottraendo 1 a ciascuno degli n addendi:

$$\begin{aligned}
&1+3+5+\cdots+(2n-1) = \\
&= \big((1+1)-1\big) + \big((3+1)-1\big) + \big((5+1)-1\big) + \cdots + \big((2n-1+1)-1\big) = \\
&= (2+4+\cdots+2n) - n \;=\; n(n+1) - n \;=\; n^2.
\end{aligned}$$

Entrambe le formule precedenti possono anche essere facilmente dimostrate per induzione. A questo punto possiamo sostituire:

$$\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dato che $\frac{1}{n+1}$ tende a zero per $n\to\infty$, ne deduciamo che il limite richiesto effettivamente esiste, e vale 1.

Errori comuni. L'errore più diffuso è stato quello di dire che il termine dominante del numeratore è $2n-1$, mentre quello del denominatore è $2n$, per cui al limite il comportamento è uguale a quello del rapporto

$$\frac{2n-1}{2n}.$$

Sebbene in questo modo si ottenga il risultato corretto (cioè 1), il ragionamento è sbagliato: le somme che stiamo considerando hanno un numero di termini che aumenta con n, per cui ha poco senso dire che c'è un termine dominante rispetto agli altri. Per far capire meglio che il ragionamento non funziona, consideriamo il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+2n}{2+4+6+\cdots+2n}.$$

Al numeratore abbiamo la somma di tutti i numeri interi positivi fino a $2n$, al denominatore solo la somma dei pari. Possiamo sostituire entrambe le somme usando le formule che conosciamo, ottenendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}2n(2n+1)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

Il criterio dei "termini dominanti" invece ci farebbe considerare soltanto il termine $2n$ al numeratore e il termine $2n$ al denominatore, per cui si otterrebbe 1 come risultato.

Un altro errore diffuso, più grossolano, è stato quello di riscrivere il limite come

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

Ebbene, non è affatto vero che un rapporto di somme è uguale alla somma dei rapporti! Quindi questo passaggio è sbagliato. Oltrettutto, il risultato che si otterrebbe dopo questo passaggio è $+\infty$, non 1.

Valutazione. Numerosi svolgimenti erano essenzialmente corretti (10 punti se ben giustificati; 8 o 9 punti in caso di assenza di giustificazioni, a seconda che ci fossero o meno anche errori di calcolo). Molti svolgimenti erano invece sbagliati (0-1 punti). Punteggi intermedi potevano essere raggiunti in vari modi: ad esempio osservando che il limite (se esiste) è ≤ 1, perché il numeratore è sempre minore del denominatore (fino a 3 punti); oppure riscrivendo il limite come

$$1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2+4+6+\cdots+2n}$$

(3 punti) ed eventualmente aggiungendo delle considerazioni su quest'ultimo termine (fino a 6 punti).

Ulteriori osservazioni. In realtà trasformare il limite dato in

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n}$$

non è una cosa del tutto priva di fondamento. Infatti è quanto si ottiene applicando il teorema di Stolz-Cesaro alle successioni

$$a_n = 1+3+5+\cdots+(2n-1), \quad b_n = 2+4+6+\cdots+2n.$$

Alcune persone hanno effettivamente seguito questa strada (che è corretta). Si noti che, invece, non si riusciva a concludere applicando il teorema delle medie di Cesaro separatamente al numeratore e al denominatore: la media dei termini del numeratore e la media dei termini del denominatore tendono entrambe a $+\infty$, per cui si trova la forma indeterminata ∞/∞.

Esercizio 2

Testo. Deteminare, al variare di $x \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{3n}{n}}.$$

Soluzione.

$$\binom{3n}{n} = \frac{(3n)!}{n!(2n)!}.$$

Consideriamo la serie dei valori assoluti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n n!(2n)!}{(3n)!}$$

e applichiamo il criterio del rapporto a questa serie a termini positivi:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{4|x|}{27} \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{2}{2n})}{(1+\frac{1}{3n})(1+\frac{2}{3n})(1+\frac{3}{3n})}.$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4|x|}{27}$. Per il criterio del rapporto, questo implica che

$$\begin{cases} \text{per } |x| < \frac{27}{4} & \text{la serie degli } a_n \text{ converge;} \\ \text{per } |x| > \frac{27}{4} & \text{la serie degli } a_n \text{ diverge ed è definitivamente crescente.} \end{cases}$$

Inoltre, nel caso $|x| = \frac{27}{4}$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2+5n}{18n^2+18n+4} = \frac{1}{2}$$

e quindi definitivamente

$$n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) > 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n.$$

Quindi, poiché a_n è a termini positivi, anche nel caso $|x| = \frac{27}{4}$ la serie diverge ed è definitivamente crescente.
Per cui, chiamando $b_n = \frac{x^n}{\binom{3n}{n}}$, poiché $a_n = |b_n|$:

$$\begin{cases} \text{per } |x| < \frac{27}{4} & \text{la serie dei } b_n \text{ converge assolutamente, quindi converge;} \\ \text{per } x \geq \frac{27}{4} & a_n = b_n, \text{ quindi la serie dei } b_n \text{ diverge a } +\infty; \\ \text{per } x \leq -\frac{27}{4} & \text{la serie dei } b_n \text{ è a segni alterni e la serie dei moduli diverge} \\ & \text{in modo crescente, quindi la serie dei } b_n \text{ è indeterminata.} \end{cases}$$

Errori comuni.

- Alcuni studenti hanno fatto errori gravi nel manipolare i fattoriali. In particolare, $(3n)! \neq 3(n!)$ e $(2n)! \neq 2(n!)$. Uno degli studenti ha scritto che $(3n)! = 3!n!$, e anche questo è falso.

- Molti studenti, una volta determinato il comportamento per $|x| < \frac{27}{4}$ e $|x| > \frac{27}{4}$, hanno completamente ignorato il caso $|x| = \frac{27}{4}$.
- Alcuni studenti hanno giustificato che nel caso $x < -\frac{27}{4}$ la serie è indeterminata in modo sbagliato. In particolare, se la serie è a segni alterni e i termini non sono infinitesimi, la serie potrebbe comunque divergere, come dimostra l'esempio

  $$1 - 1 + 2 - 1 + 3 - 1 + 4 - 1 + \ldots + n - 1 + \ldots = +\infty.$$

  Non basta neanche che i termini della serie tendano a $+\infty$ in modulo:

  $$1 - 1 + 4 - 2 + 9 - 3 + 16 - 4 + 25 - 5 + \ldots + n^2 - n + \ldots = +\infty.$$

  La condizione che i termini della serie siano crescenti in modulo e che la serie sia a segni alterni, invece, è sufficiente per stabilire che è indeterminata.
- Qualche studente ha confuso la nozione di "serie indeterminata" con "il criterio che sto usando in questo momento non stabilisce il comportamento della serie".
- Alcuni studenti hanno fatto a parte i casi $x = 1$, $x = -1$, senza nessun motivo particolare. In questo esercizio il caso da fare a parte era $x = \pm\frac{27}{4}$.
- Qualche studente ha studiato il caso $|x| = \frac{27}{4}$ usando il criterio del rapporto o il criterio della radice.
  Questo approccio non può funzionare, perché se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27}{4}|x|$, allora per $|x| = \frac{27}{4}$ il limite fa 1. Questo deve restare vero anche se si sostituisce $|x| = \frac{27}{4}$ prima di calcolare il limite.
  Analogamente, poiché $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ quando il limite a destra esiste, anche il criterio della radice non può dare risultati.

Valutazione. Essenzialmente, le cose da fare in questo esercizio erano:

- Utilizzare il criterio del rapporto.
- Calcolare correttamente il limite.
- Dedurne il caso $|x| < \frac{27}{4}$.
- Dedurre, sempre dal criterio del rapporto, il caso $x > \frac{27}{4}$.
- Determinare cosa succede nel caso $x < -\frac{27}{4}$ e giustificarlo correttamente.
- Studiare il caso $|x| = \frac{27}{4}$.

Ognuna di queste valeva 1 o 2 punti.

Esercizio 3

Testo. Studiare, al variare di $x \in \mathbb{R}$ e di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}(n!)^\alpha}.$$

Soluzione. Poniamo $a_n := \frac{x^n}{\sqrt{n}(n!)^\alpha}$. Osserviamo immediatamente che nel caso particolare in cui $x = 0$, i termini a_n sono identicamente nulli, dunque la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge al valore 0.

- Caso $x = 0$. La serie è convergente.

Nel caso $x \neq 0$ osserviamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è una serie a termini positivi. e quindi possiamo provare ad applicare il Criterio del Rapporto per testare la sua convergenza. Consideriamo dunque, se esiste, il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\, n^\alpha} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Il Criterio del Rapporto afferma che, se L esiste e $L < 1$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente, mentre se $L > 1$, allora tale serie è divergente a $+\infty$. Dato che $|x| \neq 0$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = 1$ otteniamo

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ |x| & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Deduciamo dunque un risultato nei seguenti casi.

- Caso $\alpha > 0$, $x \neq 0$. La serie è convergente. Infatti in questo caso $L = 0 < 1$, quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, dunque, per Teorema dell'assoluta convergenza, è convergente.

- Caso $\alpha = 0$, $0 < |x| < 1$. La serie è convergente. Infatti in questo caso $L = |x| < 1$ quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, dunque, per Teorema dell'assoluta convergenza, è convergente.

- Caso $\alpha = 0$, $x > 1$. La serie diverge a $+\infty$. Infatti in questo caso $L = |x| > 1$ e $a_n = |a_n|$ per ogni n.

- Caso $\alpha < 0$, $x > 0$. La serie diverge a $+\infty$. Infatti in questo caso $L = +\infty > 1$ e $a_n = |a_n|$ per ogni n.

Nei casi $(\alpha = 0 \wedge x < -1)$ e $(\alpha < 0 \wedge x < 0)$ abbiamo ancora $L > 1$, dunque in particolare la successione $|a_n|$ è definitivamente crescente. Siccome i termini a_n sono alternativamente positivi e negativi, denotando con $S_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ le somme parziali della serie originale, otteniamo che per un certo $M \in \mathbb{N}$ e per $m \geq M$ vale

$$S_{2m+3} < S_{2m+1} < S_{2M+1} < S_{2M} < S_{2m} < S_{2m+2}$$

Pertanto, in questi casi la serie non può né convergere, né divergere a $+\infty$, né divergere a $-\infty$,

- Caso $\alpha = 0$, $x < -1$. La serie è indeterminata.

- Caso $\alpha < 0$, $x < 0$. La serie è indeterminata.

Rimangono infine due soli casi da analizzare.

- Caso $\alpha = 0$, $x = 1$. La serie diverge a $+\infty$. Infatti in questo caso $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, la quale è una serie armonica generalizzata con esponente $\frac{1}{2} \leq 1$, che diverge per Criterio di Condensazione di Cauchy.
- Caso $\alpha < 0$, $x = -1$. La serie converge. Infatti in questo caso $a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ forma una successione a segno alterno, tendente a 0 e di modulo decrescente. Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge per Criterio di Leibniz.

Errori comuni. Molti studenti hanno commesso gravi errori nel calcolo del limite coinvolto nel Criterio del Rapporto o nel Criterio della Radice. Ad esempio, molti hanno affermato che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Questo è un errore molto grave, perché testimonia una confusione fra le scritture $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Per capire che una tale asserzione non ha alcun senso, basta considerare i casi particolari in cui $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o $\alpha = \frac{1}{2}$. Per $\alpha = 0$ è chiaro che la successione $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ assume costantemente il valore 1, e pertanto convergerà ad 1, non a $+\infty$. Per $\alpha = 1$ o $\alpha = \frac{1}{2}$, invece, si nota che il denominatore di $\frac{1}{n^\alpha}$ tende all'infinito in modo crescente, quindi $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ è una successione decrescente di numeri, che tende a 0, non a $+\infty$! Un altro errore diffuso, è stato quello di calcolare erroneamente il valore di $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$, ad esempio con questo passaggio

$$(+\infty =) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \cdots \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \cdots \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Ebbene, *il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti*, ma solo se il numero dei fattori coinvolti è fissato. Qui, invece, il numero dei fattori considerati cresce al crescere di n e quindi la regola non si applica. Tra l'altro, non è neppure chiaro come vada interpretato il prodotto sulla destra (di quanti fattori consta, ad esempio?).

Infine, per i casi $(\alpha = 0 \wedge x \leq -1)$ e $(\alpha < 0 \wedge x < 0)$, molti hanno osservato che la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è divergente, e da questo fatto hanno dedotto che la serie originale $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non può convergere, invocando il Teorema dell'assoluta convergenza. Tale passaggio è scorretto, dal momento che il Teorema dell'assoluta convergenza afferma solamente che *se la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *è convergente, allora anche* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge*. Dopotutto, un controesempio a questo ragionamento fallace è fornito dal caso $\alpha = 0 \wedge x = -1$. Parimenti scorretto, ma leggermente meno grave, è sostenere che se a_n è una successione con segno alterno tale che $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, *allora* la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è indeterminata. Infatti, dato che i termini di questa serie non sono infinitesimi, è certamente corretto affermare che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ non converge. Tuttavia a priori potrebbe divergere a $+\infty$ o $-\infty$ (si consideri ad esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 + (-1)^n n$).

Valutazione. In questo esercizio si richiedeva di saper gestire i numerosi casi che potevano presentarsi, e di saper utilizzare correttamente i vari criteri per la convergenza di serie. Benché gli errori commessi siano stati molteplici e variegati, l'assegnazione dei punti ha seguito indicativamente il seguente schema.

- Caso $\alpha > 0$, 3 punti:
  - Di cui 2 punti se svolto solo nel caso $x > 0$.
- Caso $\alpha = 0$, 4 punti:
  - 1 punto per $|x| < 1$;
  - 1 punto per $x > 1$;
  - 1 punto per $x < -1$, di cui $0,5$ se viene dimostrato rigorosamente solo il comportamento non-convergente, ma non il carattere indeterminato della serie.
  - 1 punto per $x = \pm 1$.
- Caso $\alpha < 0$, 3 punti:
  - 1 punto per $x > 0$;
  - 1 punto per $x < 0$, di cui $0,5$ se viene dimostrato rigorosamente solo il comportamento non-convergente, ma non il carattere indeterminato della serie.
  - 1 punto per $x = 0$.