Correzione del terzo compitino di Analisi 1 e 2 A.A. 2014/2015

Luca Ghidelli, Giovanni Paolini, Leonardo Tolomeo*

22 aprile 2015

Esercizio 1

Testo.

(1) Dire per quali valori dei parametri reali α e β esiste finito

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x - x\cos x}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,\mathrm{d}x.$$

(2) Calcolare l'integrale nel caso $\beta = 0$ e $\alpha = 2$.

Soluzione. La funzione integranda $f(x)$ è sempre continua sugli intervalli $(0,1)$ e $(1,2\pi]$, mentre per alcuni valori dei parametri non è estendibile con continuità in 0 e in 1. Se fissiamo in qualsiasi modo delle costanti $\epsilon, \delta \in (0, \frac{1}{2})$, abbiamo allora che $f(x)$ è integrabile secondo Riemann su $[0, 2\pi]$ se e solo se lo è sugli intervalli $[0, \epsilon]$ e $[1-\delta, 1+\delta]$.

- *Studio dell'integrale in un intorno di* 0. Sviluppando in serie di Taylor il numeratore per $x \to 0^+$ otteniamo:

  $$\begin{aligned}\sin x - x\cos x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\\ &= \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

  Quindi

  $$f(x) = \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{x^{\alpha-3}|\log x|^\beta}.$$

  Di conseguenza esistono delle costanti $c_1, c_2 > 0$ ed $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ tali che

  $$\frac{c_1}{x^{\alpha-3}|\log x|^\beta} \le f(x) \le \frac{c_2}{x^{\alpha-3}|\log x|^\beta} \quad \text{per } 0 < x \le \epsilon.$$

  Per tale valore di ϵ, $f(x)$ è integrabile sull'intervallo $[0, \epsilon]$ se e solo se lo è la funzione

  $$g(x) = \frac{1}{x^{\alpha-3}|\log x|^\beta}.$$

*Come sempre in ordine alfabetico e non in ordine di correzione degli esercizi.

Il fatto che $g(x)$ sia integrabile su $[0, \epsilon]$ non dipende da ϵ, e accade (come visto a lezione) se e solo se: $\alpha < 4$ (per qualsiasi β), oppure $\alpha = 4$ e $\beta > 1$.

- *Studio dell'integrale in un intorno di* 1. Sia $k = \sin 1 - \cos 1$, che osserviamo essere un numero strettamente maggiore di 0. Allora in un intorno di 1 abbiamo il seguente sviluppo:

$$f(x) = \frac{k + o(1)}{|x - 1 + o(x-1)|^\beta} = \frac{k + o(1)}{|x-1|^\beta (1 + o(1))^\beta} = \frac{k + o(1)}{|x-1|^\beta}.$$

  Analogamente a prima esistono delle costanti $c_1', c_2' > 0$ e $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ tali che

$$\frac{c_1'}{|x-1|^\beta} \leq f(x) \leq \frac{c_2'}{|x-1|^\beta} \quad \text{per } 1 - \delta \leq x \leq 1 + \delta.$$

  Per tale valore di δ si ha che $f(x)$ è integrabile su $[1 - \delta, 1 + \delta]$ se e solo se lo è

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{|x-1|^\beta}.$$

  Come è noto, ciò accade se e solo se $\beta < 1$.

Mettendo insieme quanto dimostrato, otteniamo che $f(x)$ è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[0, 2\pi]$ se e solo se $\alpha < 4$ e $\beta < 1$.

Veniamo ora alla seconda parte dell'esercizio. Per $\beta = 0$ e $\alpha = 2$ la funzione integranda diventa

$$f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}.$$

Un modo particolarmente rapido di concludere consiste nell'osservare che la funzione

$$h(x) = -\frac{\sin x}{x}$$

è una primitiva di $f(x)$. Di conseguenza

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = [h(x)]_0^{2\pi} = -\frac{\sin 2\pi}{2\pi} + \lim_{a \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1.$$

Un altro possibile modo di procedere è di integrare per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

Errori comuni. Segue una lista degli errori più frequenti.

- Studiare separatamente gli integrali

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha |\log x|^\beta} \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \frac{-x\cos x}{x^\alpha |\log x|^\beta}.$$

  È vero che se entrambi esistono finiti allora esiste finito l'integrale di $f(x)$, ma non vale il viceversa. Di conseguenza si ottiene come risultato una regione dei parametri più piccola di quella corretta.

- Sviluppare $\sin x$ solo al prim'ordine (ovvero $\sin x = x + o(x)$) e poi affermare che
$$\sin x - x\cos x = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$
Sebbene il risultato finale sia lo stesso, questo sviluppo è sbagliato. Per sviluppare $\sin x - x\cos x$ fino al terz'ordine è necessario sviluppare $\sin x$ fino al terz'ordine.

- Studiare per quali valori dei parametri la funzione integranda $f(x)$ è estendibile con continuità in 0 e in 1, invece di studiare quando è integrabile. Se $f(x)$ è estendibile con continuità in 0 e in 1 allora è integrabile su $[0, 2\pi]$, perché $[0, 2\pi]$ è compatto; tuttavia non vale il viceversa: affinché $f(x)$ sia integrabile su $[0, 2\pi]$ non è necessario che sia anche estendibile con continuità in 0 e in 1. Anche effettuando questo errore si ottiene pertanto come risultato una regione dei parametri più piccola di quella corretta.

- Limitarsi a dimostrare che $f(x)$ è integrabile per $\alpha < 4$ e $\beta < 1$, senza dire perché non è integrabile per altri valori dei parametri.

Valutazione. La parte (1) dell'esercizio valeva 7 punti, approssimativamente così suddivisi: 4 punti per lo studio dell'integrale in un intorno di 0 (2 per il caso $\alpha < 4$ e 2 per il caso $\alpha \geq 4$), e 3 punti per lo studio dell'integrale in un intorno di 1. La parte (2) valeva i restanti 3 punti.

Altri modi di guadagnare o perdere punti sono elencati di seguito.

- 1 punto (in totale per la prima parte) per la corretta osservazione del fatto che bisogna studiare l'integrale in un intorno di 0 e in un intorno di 1.

- Fino a 2 punti per aver trovato condizioni sufficienti sui parametri (diverse dal risultato corretto), per esempio studiando solamente l'estendibilità di $f(x)$ in 0.

- -1 punto se la soluzione è corretta salvo per un errore come il secondo precedentemente elencato (effettuare lo sviluppo di Taylor in modo non corretto).

Esercizio 2

Testo. Calcolare, se esiste
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}.$$

Soluzione. Riscrivendo la funzione di cui calcolare il limite come
$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = \exp\left(\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x\sin x}\right),$$
ci si riconduce a calcolare il limite di
$$\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x\sin x}.$$

Usando gli sviluppi del seno in 0 e del logaritmo in 1, si ha che:

$$\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \log(1+t) = t + o(t) \\ \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log\Big(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\Big) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \\ x\sin x = x^2 + o(x^2). \end{cases}$$

Di conseguenza,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{6},$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

Errori comuni e commenti.

- Si poteva calcolare il limite di $\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x\sin x}$ anche usando la regola di de l'Hôpital. I conti erano tuttavia più laboriosi che nella soluzione proposta.
- Alcuni studenti hanno sviluppato seno e logaritmo ad ordini maggiori di quelli della soluzione proposta. Non era sbagliato farlo, ma questo in alcuni casi ha generato errori. Particolarmente grave è stato scrivere

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

  in quanto per sviluppare fino al quarto ordine è necessario sviluppare il logaritmo fino al secondo ordine. Infatti, lo sviluppo corretto è

$$\log\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{180} + o(x^4).$$

- Dopo aver calcolato il limite di $\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x\sin x}$, qualche studente si è dimenticato di dedurre il limite di $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

Valutazione. La maggior parte degli studenti ha preso punteggio pieno. Era possibile perdere punti nei seguenti modi:

- errori nello sviluppo del seno o del logaritmo,
- errori nello sviluppo della composizione,
- errori di conto.

Errori del primo tipo compromettevano il resto dell'esercizio, quindi indicativamente sono valsi 5 punti. Errori del secondo tipo spesso erano dovuti a problemi nel metodo usato nello svolgere la composizione degli sviluppi, quindi sono stati ritenuti abbastanza gravi (4 punti). Altri modi per ottenere punteggi parziali erano:

- riscrivere il limite da calcolare come $\exp\left(\frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x\sin x}\right)$,
- scrivere correttamente gli sviluppi di seno e logaritmo.

A soluzioni parziali sono stati assegnati fino a 5 punti.

Esercizio 3

Testo. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

(1) Dimostrare che f è pari e uniformemente continua.

(2) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2}.$$

(3) Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

(4) Dire se esiste finito

$$\lim_{x\to +\infty} f(x).$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, siccome la funzione integranda $h(t) := \frac{\sin t}{1+t^2}$ è ovunque continua, la funzione $f(x)$ è continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ con derivata $f'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$.

(1) Mostriamo la parità tramite il cambiamento di variabili $t \mapsto -u$:

$$f(-x) = \int_0^{-x} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin(-u)}{1+(-u)^2}(-1)\, \mathrm{d}u = \int_0^x \frac{\sin(u)}{1+u^2}\, \mathrm{d}u = f(x).$$

La funzione $f'(x)$ è limitata: $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$. Dunque $f(x)$ è una funzione derivabile con derivata limitata. Pertanto, essa è Lipschitziana (di costante 1) e dunque uniformemente continua.

(2) La funzione $f(x)$ è ovunque derivabile ed è infinitesima in 0: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$. Inoltre sia la funzione $x \mapsto x^2$ che la sua derivata $x \mapsto 2x$ sono funzioni ovunque derivabili e nulle solo per $x = 0$. Possiamo quindi applicare il Teorema di De l'Hôpital per calcolare il limite dell'esercizio:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1+x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2},$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

(3) Consideriamo la funzione $g(x) := \frac{x^2}{2} - f(x)$. L'esercizio chiede di dimostrare che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $g(x)$ è una funzione ovunque derivabile con derivata $g'(x) = x - \frac{\sin x}{1+x^2}$. Dato che vale la disuguaglianza $\sin x \leq x$ per ogni $x \geq 0$, abbiamo che, per ogni $x \geq 0$:

$$g'(x) = x - \frac{\sin x}{1+x^2} \geq x - \sin x \geq 0.$$

Quindi $g(x)$ è una funzione crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$, dunque per ogni $x \geq 0$ avremo che $g(x) \geq g(0) = 0$. Sfruttando la parità della funzione $f(x)$ si deduce quella di $g(x)$. Dunque si ricava la disuguaglianza anche per gli $x < 0$: $g(x) = g(-x) \geq 0$.

(4) Osserviamo che l'esercizio chiede di dimostrare che esiste finito l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$. A tal proposito, come visto a lezione, è sufficiente mostrare che la funzione $\frac{\sin x}{1+x^2}$ è assolutamente integrabile, ovvero che $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{1+t^2} \right| \mathrm{d}t < +\infty$. Sfruttando il fatto che $\frac{|\sin t|}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ ricaviamo, utilizzando il Teorema del Confronto per integrali di funzioni a valori positivi:

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{1+t^2} \right| \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \Big[\mathrm{arctg}(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} < +\infty$$

Errori comuni. Il maggior numero di errori ed imprecisioni si è registrato nella parte (4). In particolare molti studenti hanno affermato che il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito, basandosi solamente sulla verifica che

$$\left| \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \text{oppure che} \quad \int_0^x \frac{\sin x}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2},$$

Ciò non è corretto poiché la prima verifica permette solo di dedurre che la funzione $f(x)$ è limitata e dunque il suo limite all'infinito, *se esiste*, è finito. Parimenti, la seconda verifica implica solo che la funzione $f(x)$ è superiormente limitata e dunque il suo limite all'infinito, *se esiste*, è finito oppure vale $-\infty$. Ricordiamo ancora che un ragionamento corretto in questo caso consiste nel dedurre la convergenza dell'integrale improprio a partire dalla sua assoluta convergenza. Un esempio della fallacia della precedente argomentazione è data ad esempio dalla funzione $F(x) = \int_0^x \sin(t)\, \mathrm{d}t$. Infatti è chiaro che $\left|\int_0^x \sin(t)\, \mathrm{d}t\right| \leq 1$, ma l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \sin(t)\, \mathrm{d}t$ non esiste.

Altri errori, meno frequenti, sono discussi nel seguito.

- Nella parte (1) non è sufficiente dire che $f'(x) \leq 1$ per dedurre l'uniforme continuità: bisogna dire che $|f'(x)| \leq 1$.
- Nella parte (1) non è sufficiente dire che $f(x)$ è continua e limitata, per dedurre l'uniforme continuità.
- Nella parte (2), prima di applicare il Teorema di De l'Hôpital, è richiesto un minimo di giustificazione (ad esempio il fatto che il numeratore ed il denominatore sono infinitesimi).
- Nella parte (3) alcuni hanno dimostrato la disuguaglianza solo per x in un intorno di 0 o di $+\infty$; l'esercizio invece chiedeva di dimostrarla per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- Nella parte (4) diversi studenti hanno dedotto la convergenza dell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ confrontandola con l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, \mathrm{d}t$; essi non si sono accorti però che questo secondo integrale diverge, siccome la funzione $t \mapsto t^{-2}$ ha problemi di integrabilità nelle vicinanze di 0.

Valutazione. La parte (1) è stata valutata 2 punti (1 punto per ognuna delle due asserzioni richieste), le parti (2) e (3) sono state valutate ognuna 3 punti e la parte (4) è stata valutata 2 punti. Nella parte (4) è stato valutato 1 punto il dimostrare semplicemente che $f(x)$ è limitata o superiormente limitata.