# Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 09/06/2015

Stra Federico*

10 giugno 2015

## Esercizio 1

### Testo

Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right)^{\alpha}.$$

### Soluzione

Sia $a_n = \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}$ il generico termine della serie. Si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n^2} = \frac{1}{2},$$

infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - [x - x^2/2 + o(x^2)]}{x^2} = \frac{1}{2}$$

e considerando $x = 1/n$ si deduce la prima. Allora la serie assegnata converge se e solo se converge la serie asintoticamente equivalente

$$\frac{1}{2^{\alpha}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}},$$

ovvero se e solo se $\alpha > 1/2$.

## Esercizio 2

### Testo

Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{[\log(1+\sqrt{x})]^2}.$$

*stra@mail.dm.unipi.it

### Soluzione

Usando Taylor si trova che per $x \to 0^+$ valgono

$$(\sqrt{e})^{\sin x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x),$$
$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x),$$
$$[\log(1+\sqrt{x})]^2 = x + o(x).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{[\log(1+\sqrt{x})]^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x/2)-(1-x/2)+o(x)}{x+o(x)} = 1.$$

## Esercizio 3

### Testo

Data l'equazione differenziale

$$y' = 2x\sqrt{1-y^2},$$

si considerino i tre diversi problemi di Cauchy

1. y(0) = 3/2,
2. y(0) = 1,
3. y(0) = 1/2.

Dire per ognuno di questi problemi se esiste la soluzione e, in caso affermativo, scriverla esplicitamente.

### Soluzione

1. Il problema non ha soluzione (non ha neppure senso) perché il termine di destra non è definito per $y$ in un intorno di 3/2.

2. Notiamo che la funzione costante $y(x) = 1$ è una soluzione. Dimostriamone l'unicità studiando la monotonia e utilizzando Lagrange. Per prima cosa occorre osservare che una soluzione soddisfa necessariamente $y(x) \leq 1$, altrimenti il termine di destra dell'equazione non è neppure definito. Per $x > 0$ si ha

   $$y(x) - 1 = y(x) - y(0) = y'(\xi)x \geq 0, \qquad \xi \in (0, x),$$

   perché $y'(\xi) \geq 0$ nella regione del piano $\xi > 0$. Quindi abbiamo anche $y(x) \geq 1$, perciò necessariamente $y(x) = 1$ per $x > 0$. Analogamente, per $x < 0$ si ha

   $$1 - y(x) = y(0) - y(x) = y'(\xi)x \leq 0, \qquad \xi \in (x, 0),$$

   perché $y'(\xi) \leq 0$ nella regione del piano $\xi < 0$, e come prima deduciamo $y(x) = 1$ anche per $x < 0$.

3. Nella regione $-1 < y < 1$, separando le variabili troviamo

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 2x,$$

da cui deve essere

$$\arcsin y(x) = x^2 + C$$

per un'opportuna $C$. Si determina la costante $C$ imponendo

$$\arcsin(1/2) = 0^2 + C,$$

da cui $C = \pi/6$ e $y(x) = \sin(x^2 + \pi/6)$ per $x$ che varia nell'intervallo massimale contentente 0 in cui $-1 < y < 1$, ovvero $x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$. Agli estremi di questo intervallo la soluzione assume il valore 1, per cui, con la stessa argomentazione del punto precedente, si può estendere in modo unico a una soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$ ponendola uguale a 1 al di fuori del suddetto intervallo:

$$y(x) = \begin{cases} \sin(x^2 + \pi/6) & x \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right), \\ 1 & x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{\pi}{3}}, \infty\right). \end{cases}$$