Compitino di Analisi 1 e 2

Soluzioni

February 4, 2016

Esercizio 1. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato, la successione definita da

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = 1 - x_n + x_n^2. \end{cases}$$

Soluzione. Si osserva subito che

$$x_{n+1} - x_n = 1 - 2x_n + x_n^2 = (1 - x_n)^2 \geq 0,$$

dunque la successione è crescente e ammette un limite L. Tale limite deve verificare

$$L = 1 - L + L^2,$$

da cui $L = 1$ o $L = +\infty$.

Se $\alpha > 1$ la successione tende crescendo a $+\infty$.

Se $\alpha = 1$ la successione è costantemente uguale a 1.

Se $0 < \alpha < 1$, allora per ogni n si ha $0 < x_n < 1$: infatti il passo base è dato dalle condizioni su α, e induttivamente se $0 < x_n < 1$

$$x_{n+1} = 1 - x_n + x_n^2 < 1 - x_n + x_n = 1,$$

e $x_n > 0$ per monotonia della successione. Dunque necessariamente x_n tende crescendo a 1.

Se $\alpha = 0$, $x_1 = 1$ e la successione è costante da quel punto in poi.

Se $\alpha < 0$ si ha $x_1 > 1$, e la successione tende crescendo a $+\infty$.

Esercizio 2. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(n\pi) + 2 + \sin n}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$

Soluzione. Dopo aver osservato che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, riscriviamo la serie come

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(-1)^n a_n + b_n],$$

dove

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha (\log n)^\beta} \qquad b_n = \frac{2 + \sin n}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$

La serie di $(-1)^n a_n$ converge se $\alpha > 1/2$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha = 1/2$ per $\beta > 0$ grazie al criterio di Leibniz.

Applicando il criterio del confronto alla serie dei b_n si ha

$$\frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \leq b_n \leq \frac{3}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$

Dunque la serie dei b_n converge se $\alpha > 1$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha = 1$ per $\beta > 1$.

Raccogliendo le condizioni, se $\alpha > 1$ e β qualsiasi, oppure $\alpha = 1$ e $\beta > 1$ la serie converge, perché si possono riarrangiare i termini delle due serie convergenti.

Se $1/2 \leq \alpha < 1$, con $\beta > 0$, la serie di $(-1)^n a_n$ converge, ma la serie dei b_n diverge. Se per assurdo la serie data convergesse, avremmo convergenza anche di

$$\sum_{n=2}^{\infty} [(-1)^n a_n + b_n + (-1)^{n+1} a_n] = \sum_{n=2}^{\infty} b_n.$$

Dunque la serie diverge.

Nei casi $\alpha = 1/2$ con $\beta \leq 0$, oppure $\alpha < 1/2$, il termine generale non è infinitesimo, e la serie data non può convergere. Basta osservare che, per n pari,

$$(-1)^n a_n + b_n = \frac{\sqrt{n} + 2 + \sin n}{n^\alpha (\log n)^\beta} \geq \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$

Esercizio 3. Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

Soluzione. Se $x = 0$ la serie è identicamente nulla e converge. Negli altri casi, indicando con a_n il termine generale, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n+1)!x^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n!n!x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 x}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{x}{4}.$$

Applicando il criterio del rapporto, se $|x| < 4$ la serie converge assolutamente, se $|x| > 4$ la serie non converge.

Se $x = 4$ si può osservare che il termine generale non è infinitesimo, pertanto la serie non converge. Si ha infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

ovvero $a_{n+1} > a_n$. Analogamente, per $x = -4$ si ha $|a_{n+1}| > |a_n|$, e la serie non può convergere.