Analisi 1 e 2 - Terzo compitino

Soluzioni

20 aprile 2016

Esercizio 1. Sia
$$a_n = \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{2}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$
Espandendo in serie di Taylor fino al secondo ordine, otteniamo
$$a_n = \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{2n^2} - 1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} + o(n^{-2}) = \frac{3}{2n^2} + o(n^{-2}),$$
pertanto a_n è asintotico a $3/2n^2$. Possiamo quindi determinare la convergenza assoluta della serie con il criterio del confronto asintotico, osservando che per ogni $\alpha > 0$, la successione ${a_n}^\alpha$ è asintotica a $3^\alpha/2^\alpha n^{2\alpha}$, e pertanto la prima serie converge assolutamente se e solo se converge la seconda, ovvero se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Per la determinare la convergenza semplice, possiamo studiare la funzione
$$g(x) = x + \cos x - \cos 2x - \sin x,$$
la cui derivata è
$$g'(x) = 1 - \sin x + 2\sin 2x - \cos x$$
che, per x abbastanza piccolo (cioè n abbastanza grande) è strettamente positiva (perché $1 - \cos x \geq 0$ sempre e $2\sin 2x - \sin x = 3x + o(x)$, e quindi è positiva per x sufficientemente piccolo). Segue che, per $x \searrow 0^+$, ovvero per $n \nearrow +\infty$, la funzione è decrescente, e pertanto è decrescente a_n. Si ha quindi che la serie data è definitivamente a segni alterni e con termini di modulo decrescente, e pertanto converge per il criterio di Leibniz per ogni $\alpha > 0$.

Lo stesso risultato si ottiene studiando la funzione $f(x) = 1/x + \cos 1/x - \cos 2/x - \sin 1/x$, osservando che la sua derivata è strettamente negativa per x sufficientemente grande.

Esercizio 2. Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor si ha

$$
\begin{aligned}
\cos(e^x-1) &= \cos\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{24}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^4+o(x^4)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^4);
\end{aligned}
$$

$$
\sin(x^2+x^3) = x^2+x^3+o(x^4);
$$

$$
e^{(\sin x)^4} = e^{(x+o(x^2))^4} = 1+x^4+o(x^4).
$$

Sostituendo nell'espressione originale si ottiene

$$
\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4})+x^2+x^3-2(1+x^4)+o(x^4)}{x^\gamma} = \lim_{x\to 0} -\frac{5x^{4-\gamma}}{2}
$$

che è uguale a 0 per $\gamma < 4$, a $-5/2$ per $\gamma = 4$, e $-\infty$ per $\gamma \geq 4$.

Esercizio 3. Sia $f(x)$ la funzione integranda. Per $x \to 0$ si ha $\arcsin x \sim \arctan x \sim x$, pertanto

$$
f(x) \sim \frac{x^{1/4}x^\alpha}{x^{3/4}|\log x|^\beta} = \frac{x^{\alpha-1/2}}{|\log x|^\beta}
$$

il cui integrale in un intorno destro di 0 converge se e solo se

- $\alpha - 1/2 > -1$, ovvero $\alpha > -1/2$, per ogni β
- $\alpha - 1/2 = -1$, ovvero $\alpha = -1/2$, per $\beta > 1$.

Per $x \to 1$ si ha $\log x \sim 1-x$, e $\sqrt{1-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \sim \sqrt{1-x}$, pertanto

$$
f(x) \sim \frac{(1-x)^\alpha}{(1-x)^{1/2}(1-x)^\beta} = (1-x)^{\alpha-\beta-1/2}
$$

il cui integrale in un intorno sinistro di 1 converge se e solo se $\alpha-\beta-1/2 > -1$, ovvero $\alpha-\beta > -1/2$. Nell'intervallo $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ (con $0 < \varepsilon < 1/2$) la funzione $f(x)$ è continua e limitata, e quindi integrabile. In conclusione, l'integrale converge per $\alpha > -1/2$, $\beta < \alpha + 1/2$.

Per $\alpha = \beta = 0$ la funzione integranda diventa

$$
f(x) = \frac{\arcsin(x^{1/4})}{x^{3/4}\sqrt{1-\sqrt{x}}}.
$$

Sostituendo $y = x^{1/4}$, l'integrale diventa

$$
4\int_0^1 \frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}\,y = \left[2(\arcsin y)^2 + c\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{2}.
$$