Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 09/06/2016

Stra Federico*

10 giugno 2016

Esercizio 1

Testo

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\log(n) \arctan(n) \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}.$$

Soluzione

Sia $a_n = \log(n)\arctan(n)\sin(1/n)$. Si ha che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log(n)\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}.$$
Pertanto la serie data $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^{\alpha}$ converge assolutamente se e solo se fa altrettanto la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\frac{\log(n)}{n}\right)^{\alpha},$$
ovvero se e solo se $\alpha > 1$. In tal caso, la serie converge anche semplicemente.

Sia ora $0 < \alpha \leq 1$. Dimostriamo che la successione a_n è definitivamente decrescente e tende a 0 (quindi anche a_n^{α} ha le medesime proprietà). Sia $f(x) = \log(x)\arctan(x)\sin(1/x)$. Calcolando la derivata di f e facendone il limite per $x \to \infty$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}\arctan(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \log(x)\frac{1}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \log(x)\arctan(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{x^2}\Bigg[\underbrace{x\arctan(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow \atop \pi/2} + \underbrace{\log(x)\frac{x^2}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow \atop 0} - \underbrace{\log(x)\arctan(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow \atop \infty}\Bigg] \end{aligned}$$
si trova che $f' < 0$ definitivamente, quindi $a_n = f(n)$ è definitivamente decrescente. Inoltre $a_n \sim \frac{\pi}{2}\frac{\log(n)}{n}$ tende a 0. Ne segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^{\alpha}$ converge semplicemente con $0 < \alpha \leq 1$ per il criterio di Leibniz.

* stra@mail.dm.unipi.it

Esercizio 2

Testo

Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(e^{1/x^2} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{2}\arctan^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Soluzione

Sostituendo $t = 1/x$ si trova che il limite assegnato è equivalente a

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to0^+} \frac{e^{t^2} - \cos(t) - \frac{3}{2}\arctan^2(t)}{t^2\sin^2(t)} = \\
&\quad = \frac{\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + o(t^5)\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5)\right) - \frac{3}{2}\left(t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)\right)^2}{t^2\left(t + o(t^2)\right)^2} = \\
&\quad = \frac{\frac{35}{24}t^4 + o(t^4)}{t^4 + o(t^4)} = \frac{35}{24}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Testo

Data l'equazione differenziale

$$y' = x\sqrt[3]{y-1},$$

si considerino i due seguenti problemi di Cauchy:

1. $y(3) = 9$;
2. $y(3) = 1$.

Dire per ognuno di questi problemi se esistono soluzioni e, in caso affermativo, scriverle esplicitamente.

Soluzione

Osserviamo che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x\sqrt[3]{y-1}$ è localmente Lipschitziana in y uniformemente in x nel dominio $\Omega = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{1\})$. In questa regione pertanto il teorema di Cauchy-Lipschitz garantisce l'esistenza locale e l'unicità delle soluzioni.

Per il problema 1 il dato iniziale giace nella regione Ω. Separando le variabili e integrando si trova

$$\begin{aligned}
\int_9^y \frac{dy}{\sqrt[3]{y-1}} &= \int_3^x x\,dx \\
\left[\frac{3}{2}(y-1)^{2/3}\right]_9^y &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_3^x \\
\frac{3}{2}(y-1)^{2/3} - 6 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2} \\
y &= 1 + \left(\frac{x^2+3}{3}\right)^{3/2}.
\end{aligned}$$

Questa funzione definisce una soluzione globale per il problema 1 e, siccome non esce dalla regione Ω, essa è anche l'unica soluzione del problema.

Per il problema 2 l'analisi è più elaborata perché il dato iniziale non si trova nella regione Ω, quindi a priori ci possono essere più soluzioni. Vediamo che in effetti questo accade. Innanzitutto, la funzione $y(x) = 1$ è una soluzione. Troviamo le soluzioni in Ω che soddisfano $y(x_0) = 1$. Con gli stessi conti fatti in precedenza si trova

$$\begin{aligned}\int_1^y (y-1)^{-1/3} dy &= \int_{x_0}^x x\,dx \\ \left[\frac{3}{2}(y-1)^{2/3}\right]_1^y &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_0}^x \\ y &= 1 \pm \left(\frac{x^2 - x_0^2}{3}\right)^{3/2}.\end{aligned}$$

Ragionando sul segno della derivata $y'(x)$ si vede che per $x \in [0,3]$ si deve avere $y(x) = 1$.

Pertanto ci sono 9 famiglie di soluzioni che si ottengono combinando 3 possibili comportamenti per $x \to -\infty$ con 3 possibili comportamenti per $x \to \infty$; tutte queste soluzioni valgono comunque identicamente 1 nel tratto $[0,3]$:

- comportamenti per $x \to -\infty$:
  - $y(x) = 1$ per $x \in (-\infty, 0]$,
  - esiste $x_0 \in (-\infty, 0]$ tale che $y(x) = 1 + \left(\frac{x^2 - x_0^2}{3}\right)^{3/2}$ per $x \in (-\infty, x_0)$ e $y(x) = 1$ per $x \in [x_0, 0]$,
  - esiste $x_0 \in (-\infty, 0]$ tale che $y(x) = 1 - \left(\frac{x^2 - x_0^2}{3}\right)^{3/2}$ per $x \in (-\infty, x_0)$ e $y(x) = 1$ per $x \in [x_0, 0]$.
- comportamenti per $x \to \infty$:
  - $y(x) = 1$ per $x \in [3, \infty)$,
  - esiste $x_1 \in [3, \infty)$ tale che $y(x) = 1 + \left(\frac{x^2 - x_1^2}{3}\right)^{3/2}$ per $x \in (x_1, \infty)$ e $y(x) = 1$ per $x \in [3, x_1]$,
  - esiste $x_1 \in [3, \infty)$ tale che $y(x) = 1 - \left(\frac{x^2 - x_1^2}{3}\right)^{3/2}$ per $x \in (x_1, \infty)$ e $y(x) = 1$ per $x \in [3, x_1]$,

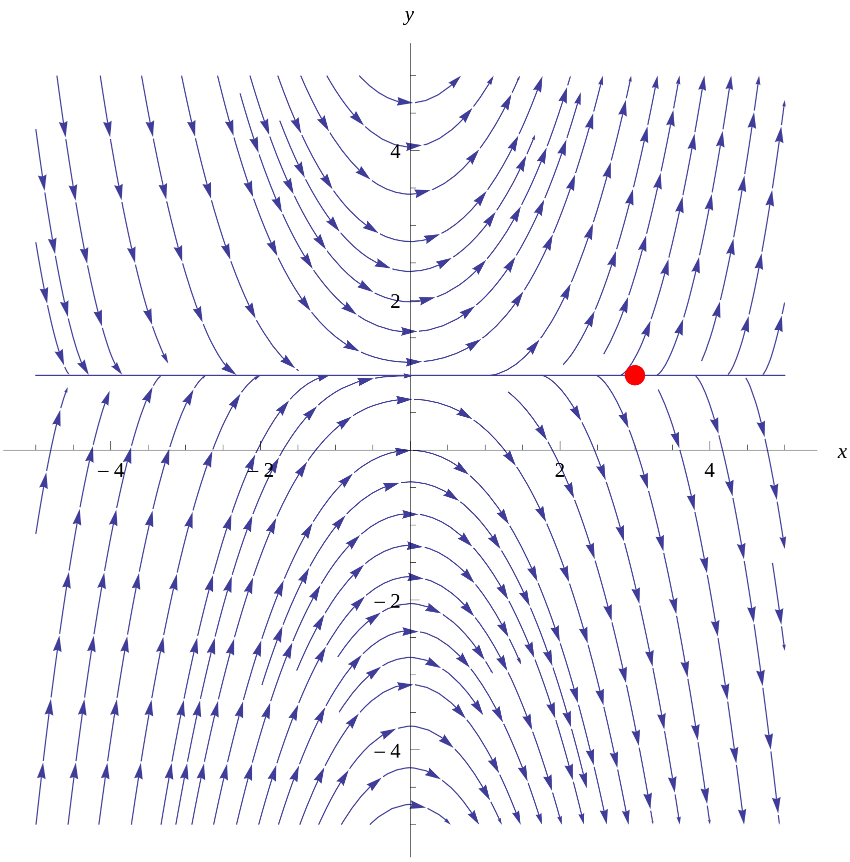

Figura 1: Alcune soluzioni dell'ODE. In rosso è segnato il dato iniziale del problema 2.