Correzione del compito di Analisi 1 e 2 del giorno 24/11/2016

Stra Federico*

26 novembre 2016

Esercizio 1

Testo

Studiare, al variare di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{[\exp(\alpha/n^2) - \cos(1/n)]\, n^\beta}{(\log n)^\gamma}.$$

Soluzione

Sia

$$\begin{aligned} a_n &= \exp(\alpha/n^2) - \cos(1/n) \\ &= \left[1 + \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\alpha^2}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] - \left[1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left[\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4!}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Si ha che a_n ha segno definitivamente costante per n grande. In particolare, definitivamente in n vale
$$\begin{cases} a_n > 0 & \text{se } \alpha > -\frac{1}{2}, \\ a_n < 0 & \text{se } \alpha < -\frac{1}{2}, \\ a_n > 0 & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ perché } \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{4!} = \frac{1}{12} > 0. \end{cases}$$

Questo ci dice che la serie converge semplicemente se e solo se converge assolutamente. Se $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, allora $a_n \sim n^{-2}$, quindi

$$\frac{a_n n^\beta}{(\log n)^\gamma} \sim \frac{n^{\beta-2}}{(\log n)^\gamma}$$

e la serie converge per $\beta < 1, \forall\gamma$ o $\beta = 1, \gamma > 1$. Se invece $\alpha = -\frac{1}{2}$, allora $a_n \sim n^{-4}$, quindi

$$\frac{a_n n^\beta}{(\log n)^\gamma} \sim \frac{n^{\beta-4}}{(\log n)^\gamma}$$

*stra@mail.dm.unipi.it

e la serie converge per $\beta < 3, \forall\gamma$ o $\beta = 3, \gamma > 1$. Ricapitolando, la serie converge (semplicemente e assolutamente) se e solo se

$$\left\{\alpha \neq -\frac{1}{2} \wedge [\beta < 1 \vee (\beta = 1 \wedge \gamma > 1)]\right\} \vee \left\{\alpha = -\frac{1}{2} \wedge [\beta < 3 \vee (\beta = 3 \wedge \gamma > 1)]\right\}.$$

Esercizio 1 (Analisi 2)

Testo

Scrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - 2u' + u = \frac{e^x}{1+x^2}.$$

Soluzione

L'equazione caratteristica associata $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ ha una radice doppia $\lambda = 1$, quindi le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea sono $C_1 e^x + C_2 x e^x$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale tramite il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Cerchiamo una soluzione della forma $v_1(x)e^x + v_2(x)xe^x$. Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} v_1'(x)e^x + v_2'(x)xe^x = 0, \\ v_1'(x)e^x + v_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}. \end{cases}$$

La soluzione è

$$v_1'(x) = -\frac{x}{1+x^2}, \qquad v_2'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

da cui

$$v_1(x) = -\frac{1}{2}\log(1+x^2), \qquad v_2(x) = \arctan(1+x^2).$$

La soluzione generale è quindi

$$u(x) = \left(-\frac{1}{2}\log(1+x^2) + x\arctan(1+x^2) + C_1 + C_2 x\right)e^x.$$

Esercizio 2

Testo

Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x\int_0^x t^2 e^{-t} dt\right)}{(1-\cos x)\log^2(1+x)}.$$

Soluzione

Siccome

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log^2(1+x)}{x^2} = 1,$$

il limite dato equivale a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x\int_0^x t^2e^{-t}dt\right)}{\frac{1}{2}x^2x^2} &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(x\int_0^x t^2e^{-t}dt\right)\left(\int_0^x t^2e^{-t}dt + x^3e^{-x}\right)}{2x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t^2e^{-t}dt + x^3e^{-x}}{2x^3} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{-x} + 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x}}{6x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4x^2 - x^3}{6x^2}e^{-x} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Testo

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3\sin(2x), \\ y(\pi/4) = \sqrt{2}, \end{cases}$$

precisando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione stessa.

Soluzione

L'equazione differenziale data soddisfa le ipotesi di esistenza e unicità locale. Se $y(x_0) = 0$ per un certo punto x_0, allora $y(x) = 0$ è una soluzione; pertanto la soluzione che cerchiamo non si può annullare. Questo ci consente di dividere l'equazione per y e ottenere

$$\frac{y'(x)}{y(x)^3} = 2\sin(x)\cos(x)$$

da cui integrando

$$-\frac{1}{2y(x)^2} = \sin(x)^2 + C.$$

Le condizioni iniziali impongono

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + C,$$

da cui $C = -3/4$. La soluzione è allora

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2\left(\frac{3}{4} - \sin(x)^2\right)}}$$

ed è definita sul più grande intervallo contenente $\pi/4$ in cui $\frac{3}{4} - \sin(x)^2 > 0$, ovvero $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.