SOLUZIONE del COMPITO DI ANALISI I e II
Corso di laurea in Fisica
12 - 01 - 2018

---

1. Esercizio 1.
   Ricordando gli sviluppi di Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \sigma(x^4)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \sigma(x^4)$$

   si ottiene

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2n^2}} - cos(\frac{1}{n}) &= 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4n^4} + \sigma(\frac{1}{n^4}) - (1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^4} + \sigma(\frac{1}{n^4}) \\ &= \frac{1}{n^4}(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}) + \sigma(\frac{1}{n^4})) \end{aligned}$$

   Quindi:

$$\{e^{-\frac{1}{2n^2}} - cos(\frac{1}{n})\}log(n)^\alpha n^\beta = [\frac{1}{12}\frac{1}{n^4} + \sigma(\frac{1}{n^4})]log(n)^\alpha n^\beta$$

   Perciò la serie è definitivamente a termini positivi e quindi la convergenza semplice e assoluta coincidono.
   Inoltre la convergenza della serie data è equivalente a quella di

$$\sum \frac{1}{n^4} log(n)^\alpha n^\beta$$

   che converge se $\beta < 3$, $\forall \alpha$ e per $\beta = 3$ e $\alpha < -1$.
   (infine, per essere pignoli, si noti che per $n = 1$ il primo termine della serie non è definito per α negativo)

2. Esercizio 2
   Intanto notiamo che:

$$\int_0^{1/2} x^\beta (1 - 4x^2)^\alpha dx = \int_0^{1/2} x^\beta (1 - 2x)^\alpha (1 + 2x)^\alpha dx$$

   che converge se e solo se $\beta > -1$ e $\alpha > -1$.
   Per calcolare

$$\int_0^{1/2} x^3 \sqrt{1 - 4x^2} dx$$

poniamo $\sqrt{1-4x^2} = t$; allora $1 - 4x^2 = t^2$ e quindi $x^2 = \frac{1-t^2}{4}$; da cui $2xdx = -\frac{t}{2}dt$ ovvero $xdx = -\frac{t}{4}dt$; abbiamo allora:

$$\int_0^{1/2} x^3\sqrt{1-4x^2}dx = -\int_1^0 \frac{1-t^2}{4}t\frac{t}{4}dt = \frac{1}{16}\int_0^1 (t^2-t^4)dt = \frac{1}{16}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) = \frac{1}{120}$$

3. Esercizio 3
Osserviamo che $f(x,y) = x^2\sqrt{1-y^2}$ è definita e continua su $\mathbb{R}\times[-1,1]$ ed è lipschitziana in un intorno di ogni punto interno; quindi il problema ha ivi localmente una unica soluzione.
Si noti che -1 e 1 risolvono l'equazione differenziale.
Poichè $y^2 \neq 1$ in un intorno del punto iniziale, dividendo per $\sqrt{1-y^2}$ abbiamo:

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = x^2$$

da cui

$$\arcsin y(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

Dalla condizione iniziale $y(0) = 0$ abbiamo $\arcsin 0 = C$ e quindi $C = 0$.
Otteniamo quindi una soluzione locale

$$y(x) = sin(\frac{x^3}{3})$$

valida per $-\frac{\pi}{2} < \frac{x^3}{3} < \frac{\pi}{2}$. (gli estremi sono limitati dall'intervallo di definizione di arcsin).
Cerchiamo di prolungare la soluzione fuori dall'intervallo $[-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}]$: agli estremi la funzione vale rispettivamente -1 e 1. Ora le costanti -1 e 1 risolvono l'equazione differenziale, per cui abbiamo in definitiva:

$$y(x) = \begin{cases} -1 & x < -\sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi} \\ \sin(\frac{x^3}{3}) & x \in [-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi}] \\ 1 & x > \sqrt[3]{\frac{3}{2}\pi} \end{cases}$$

che è definita $\forall x$ e risolve il problema di Cauchy dato. Si vede facilmente che biforcazioni della soluzione che si staccano dal punto -1 o da 1 non possono passare da $(0,0)$, e questo prova l'unicità della soluzione.