Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

18 giugno 2018

1. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt \cdot \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Soluzione. Osserviamo che il primo integrale tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ in quanto la funzione integranda è positiva e non infinitesima. Il secondo integrale, invece, tende a zero in quanto la funzione integranda è sommabile e quindi la coda dell'integrale tende a zero. Siamo quindi di fronte ad una forma indeterminata $+\infty \cdot 0$ che possiamo cercare di risolvere con il teorema di de l'Hospital. Possiamo ricondurci ad una forma $0/0$:

$$\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt \cdot \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}{\frac{1}{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt}}.$$

Il rapporto delle derivate risulta quindi

$$\frac{-e^{-\frac{x^2}{2}}}{-\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\left(\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt\right)^2}} = \left(\frac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt}{e^{\frac{x^2}{2}}}\right)^2.$$

Abbiamo ottenuto nuovamente una forma indeterminata, stavolta del tipo $+\infty/(+\infty)$. Possiamo provare ad applicare nuovamente de l'Hospital. Il rapporto delle derivate è:

$$\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{xe^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{x} \to 0 \qquad x \to +\infty.$$

Dunque 0 è anche il risultato del limite iniziale. $\square$

Soluzione alternativa. Possiamo applicare lo stesso metodo della soluzione precedente alla forma indeterminata $+\infty/+\infty$:

$$\frac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt}{\frac{1}{\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}}.$$

□

Ulteriore soluzione alternativa. Si può scrivere

$$\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt \cdot \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\,dt}{e^{\frac{x^2}{2}}} \cdot \frac{\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}{e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

e applicare il teorema di de l'Hospital ai due rapporti separatamente. Si trova quindi che entrambi tendono a zero, quindi il prodotto pure tende a zero. □

2. Posto $f(x) = \ln(\cos(x + x^2))$ calcolare $f^{(4)}(0)$ e $f^{(5)}(0)$.

Dimostrazione. Soluzione. Puntiamo a scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 5 della funzione $f(x)$ per $x \to 0$. Utilizzeremo i seguenti noti sviluppi per $x \to 0$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5),$$
$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\cos(x + x^2) &= 1 - \frac{(x + x^2)^2}{2} + \frac{(x + x^2)^4}{24} + o\big((x + x^2)^5\big)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{4x^5}{24} + o(x^5)\\ &= 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} + o(x^5)\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\ln(\cos(x + x^2)) &= -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)\right)^2\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3\right)\\ &= -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}x^4 + \frac{x^5}{6} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{2} + o(x^5)\\ &= -\frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{14}{4!}x^4 - \frac{40}{5!}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Visto che l'unico polinomio $P(x)$ di grado non superiore a 5 per cui valga $f(x) = P(x) + o(x^5)$ è il polinomio di Taylor:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

per il principio di identità dei polinomi deduciamo che

$$f^{(4)}(0) = -14, \qquad f^{(5)}(0) = -40.$$

□

3. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \int_{-n}^{n} \sqrt[4]{1+x^4}\, dx.$$

Soluzione. E' facile verificare che si ha

$$|x| \le \sqrt[4]{1+x^4} \le 1 + |x|$$

da cui

$$\frac{1}{n^2}\int_{-n}^{n} |x|\, dx \le \frac{1}{n^2}\int_{-n}^{n} \sqrt[4]{1+x^4}\, dx \le \frac{1}{n^2}\int_{-n}^{n} (1+|x|)\, dx.$$

E visto che si ha

$$\int_{-n}^{n} |x|\, dx = 2\int_{0}^{n} x\, dx = n^2, \qquad \int_{-n}^{n} 1\, dx = 2n$$

otteniamo:

$$1 \le \frac{1}{n^2}\int_{-n}^{n} \sqrt[4]{1+x^4}\, dx \le \frac{2}{n} + 1.$$

Per il teorema dei carabinieri, il limite cercato è 1. □

Soluzione alternativa. Con il cambio di variabile $x = ny$, $dx = ndy$ si ottiene

$$\frac{1}{n^2}\int_{-n}^{n} \sqrt[4]{1+x^4}\, dx = \frac{1}{n^2}\int_{-1}^{1} \sqrt[4]{1+n^4y^4}\, ndy = \int_{-1}^{1} \sqrt[4]{\frac{1}{n^4} + y^4}\, dy.$$

Posto

$$f_n(y) = \sqrt[4]{\frac{1}{n^4} + y^4}$$

Si osserva che per ogni $y \in \mathbb{R}$ si ha $f_n(y) \to |y|$ per $n \to +\infty$. Con un opportuno studio di funzione possiamo dimostrare che la funzione $f_n(y) - |y|$ ha massimo per $y = 0$ e dunque

$$\sup |f_n(y) - |y|| = f_n(0) - 0 = \frac{1}{n^4} \to 0.$$

Significa che $f_n(y) \to |y|$ uniformemente. Dunque si può scambiare il limite con l'integrale per ottenere:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[4]{\frac{1}{n^4} + y^4}\, dy \to \int_{-1}^{1} |y|\, dy = 2 \int_0^1 y\, dy = 1.$$

□

Ulteriore soluzione. Possiamo provare a calcolare il limite di funzione

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_{-x}^{x} \sqrt[4]{1+t^4}\, dt}{x^2}$$

tramite il teorema di de l'Hospital. E' chiaro infatti che numeratore e denominatore tendono entrambi a $+\infty$ (al numeratore abbiamo una funzione positiva ma non infinitesima). Il rapporto delle derivate è

$$\frac{2\sqrt[4]{1+x^4}}{2x} = \sqrt[4]{\frac{1}{x^4} + 1} \to 1 \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dunque l'Hospital può essere applicato e il limte di funzione che abbiamo introdotto vale anch'esso 1. Visto che il limite di funzione esiste, per il teorema di collegamento tra limiti di funzione e limiti di successione possiamo affermare che anche il limite della successione esiste ed è uguale. □