Analisi Matematica A
Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

4 febbraio 2019

1. Dimostrare che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$e^x = -1 - x^2 - x^3 + 2\lambda$$

ha una e una sola soluzione $x = x(\lambda)$. Dimostrare poi che $x(\lambda)$ è continua e derivabile e calcolare $x'(1)$.

Soluzione. Poniamo

$$f(x) = \frac{e^x + 1 + x^2 + x^3}{2}.$$

Vediamo che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha una e una sola soluzione $x(\lambda)$: dimostriamo che $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile, perché surgettiva e iniettiva. Surgettiva perché continua e inoltre chiaramente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

D'altra parte $f(x)$ è iniettiva perchè strettamente crescente. Si ha infatti:

$$f'(x) = \frac{e^x + 2x + 3x^2}{2}.$$

Osserviamo che risulta sempre

$$e^x \geq 1 + x.$$

Basta infatti scrivere lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange:

$$e^x = 1 + x + e^\xi x^2/2.$$

Altrimenti si può osservare che la funzione $g(x) = e^x - 1 - x$ ha derivata $g'(x) = e^x - 1$ e quindi $g'(x) < 0$ per $x < 0$ e $g'(x) > 0$ per $x > 0$. Perciò la funzione $g(x)$ ha un minimo assoluto per $x = 0$ con $g(0) = 0$.

Dunque
$$2f'(x) = e^x + 2x + 3x^2 \geq 1 + 3x + 3x^2$$
e quest'ultimo polinomio di secondo grado è sempre positivo in quanto ha discriminante negativo.

Altrimenti, per dimostrare che $f'(x) > 0$, si poteva osservare che chiaramente questo è vero per $x > 0$ e per $x < -1$, perché allora $h(x) = 2x + 3x^2 > 0$. Inoltre il minimo di $h(x)$ è $h(-1/3) = -1/3$; infine in $[-1, 0]$ $e^x > e^{-1}$. Quindi, per $x \in [-1, 0]$, $2f'(x) > e^{-1} - 1/3$. Basta allora osservare che $e^{-1} > 1/3$.

In conclusione $f'(x) > 0$ e perciò f è strettamente crescente quindi invertibile. Inoltre $f \in C^1$, $f' \neq 0$ quindi $f^{-1} \in C^1$. Poniamo $x(\lambda) = f^{-1}(\lambda)$, $f(0) = 1$ quindi
$$x(1) = f^{-1}(1) = 0.$$
Dunque
$$\frac{dx}{d\lambda}(1) = x'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1/2} = 2.$$
□

2. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{2}{x \cdot \arcsin(e^x - e^{-x})} \right).$$

Soluzione. Facendo il denominatore comune la funzione di cui dobbiamo trovare il limite diventa
$$\frac{x \cdot \cos x \cdot \arcsin(e^x - e^{-x}) - 2\sin^2(x)}{x \cdot \sin^2 x \cdot \arcsin(e^x - e^{-x})}.$$

Si ha:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
e^x - e^{-x} &= 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\arcsin t &= t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\
\arcsin(e^x - e^{-x}) &= 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{(2x + o(x))^3}{6} + o((2x + o(x))^3) \\
&= 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{8}{6}x^3 + o(x^3) = 2x + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).
\end{aligned}
$$

Dunque la nostra funzione diventa

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \left(2x + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 2\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{x \cdot (x^2 + o(x)) \cdot (2x + o(x))} \\
&= \frac{2x^2 - x^4 + \frac{5}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^5)} \to \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

□

3. Data la serie

$$
\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \left(\arcsin\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{3n^3}\right)\right)^\alpha
$$

dimostrare che, per n_0 sufficientemente grande, la serie è ben definita. Studiarne poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza semplice e la convergenza assoluta.

Soluzione. La serie data si può scrivere nella forma

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n a_n^\alpha$$

con

$$\begin{aligned} a_n &= f(1/n) \\ f(x) &= \arcsin x - \sin x - \ln\left(1 + \frac{x^3}{3}\right). \end{aligned}$$

Usiamo Taylor per $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8 \cdot 5}x^5 + o(x^5) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \\ \ln(1+t) &= t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \end{aligned}$$

$$\ln\left(1 + \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^5).$$

Quindi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + \frac{3}{40n^5} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{5!n^5} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) \\ &= \frac{1}{n^5}\left(\frac{3}{40} - \frac{1}{5!}\right) + o\left(\frac{1}{n^5}\right) \\ &= \frac{1}{15}\frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right). \end{aligned}$$

In conclusione $a_n > 0$ per n sufficientemente grande. Inoltre la serie converge assolutamente se la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^\alpha$ converge e questa ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^{5\alpha}}$ che converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{5}$.

Per studiare la convergenza semplice, dato che $a_n^\alpha \to 0$ per ogni $\alpha > 0$, studiamo la decrescenza di a_n, almeno per $n \geq n_0$. Visto che

$$f(x) = \frac{x^5}{15} + o(x^5)$$

sappiamo che $x^5/15$ è il polinomio di Taylor di f di ordine 5. Significa che le derivate di f fino all'ordine 4 si annullano tutte in $x = 0$ mentre la derivata quinta è $f^{(5)}(0) = \frac{5!}{15}$. Ma allora le derivate di f' fino all'ordine

3 si annullano in $x = 0$ e la derivata quarta di f' coincide con la derivata quinta di f. Dunque la formula di Taylor ci dice

$$f'(x) = \frac{5!}{15 \cdot 4!}x^4 + o(x^4) = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

(il polinomio di Taylor della derivata è la derivata del polinomio di Taylor).

In alternativa, per trovare il polinomio di Taylor della funzione $f'(x)$, si poteva, naturalmente, derivare la funzione f(x) e scrivere gli sviluppi di Taylor dei vari termini. Naturalmente si sarebbe ottenuta di nuovo la formula

$$f'(x) = \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

In conclusione, $f'(x) > 0$ per $x \in (0, \delta)$ e a_n è definitivamente decrescente. La serie data converge, per il criterio di Leibniz, per ogni $\alpha > 0$. $\square$