Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta parziale n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

17 aprile 2019

1. Determinare le soluzioni $u(x)$ dell'equazione differenziale

$$u'' + u' - 2u = \sin x + \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico associato è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono:

$$u_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per risolvere l'equazione non omogenea è sufficiente trovare una soluzione paticolare. Grazie al principio di sovrapposizione possiamo trovare separatamente una soluzione particolare con termine noto $\sin x$ e una soluzione particolare con termine noto $\frac{e^x}{1+e^x}$.
Per la prima soluzione particolare possiamo utilizzare il metodo di somiglianza che ci garantisce l'esistenza di una soluzione della forma

$$u_1(x) = a \sin x + b \cos x.$$

Facendo le derivate

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= -b \sin x + a \cos x \\ u_1''(x) &= -a \sin x - b \cos x \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione si ottiene:

$$(-a - b - 2a) \sin x + (-b + a - 2b) \cos x = \sin x$$

da cui imponendo

$$\begin{cases} -3a - b = 1 \\ a - 3b = 0 \end{cases}$$

si ottiene $a = -\frac{3}{10}$ e $b = -\frac{1}{10}$ da cui

$$u_1(x) = -\frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x.$$

Per il secondo termine noto non possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Procediamo quindi con il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione della forma

$$u_2(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-2x}.$$

Calcoliamo le derivate imponendo le opportune condizioni sulle derivate delle costanti:

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= c_1 e^x - 2c_2 e^{-2x}, \qquad c_1' e^x + c_2' e^{-2x} = 0 \\ u_2''(x) &= c_1 e^x + 4c_2 e^{-2x} + c_1' e^x - 2c_2' e^{-2x} \end{aligned}$$

□

da cui, affinché valga l'equazione, si richiede

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-2x} = 0, \\ c_1' e^x - 2c_2' e^{-2x} = \frac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$$

che è equivalente a $\begin{cases} 2I + II \\ I - II \end{cases}$

$$\begin{cases} 3c_1' e^x = \frac{e^x}{1+e^x} \\ 3c_2' e^{-2x} = -\frac{e^x}{1+e^x} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} c_1' = \frac{1}{3}\frac{1}{1+e^x} \\ c_2' = -\frac{1}{3}\frac{e^{3x}}{1+e^x} \end{cases}$$

da cui, integrando e facendo il cambio di variabili $e^x = t$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}\,dt = \frac{1}{3}\int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right] dt = \frac{1}{3}\left[\ln t - \ln(1+t)\right] \\ &= -\frac{1}{3}\ln(1+t^{-1}) = -\frac{1}{3}\ln(1+e^{-x}) \\ c_2 &= -\frac{1}{3}\int \frac{t^2}{1+t}\,dt = \frac{1}{3}\int \left[-t + 1 - \frac{1}{1+t}\right] dt \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{t^2}{2} + t - \ln(1+t)\right] = -\frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}\ln(1+e^x). \end{aligned}$$

Si ottiene dunque

$$u_2(x) = -\frac{1}{3}\ln(1+e^{-x})\cdot e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{3}\ln(1+e^x)\cdot e^{-2x}.$$

Dunque ogni soluzione dell'equazione originaria si scrive al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ nella forma:

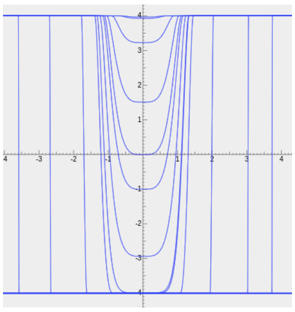
$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) \\ &= \left[c_1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{3}\right] e^x + \left[c_2 - \frac{\ln(1+e^x)}{3}\right] e^{-2x} - \frac{1}{6} + \frac{e^{-x}}{3} - \frac{3\sin x + \cos x}{10} \end{aligned}$$

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 4x^3\sqrt{16-u^2} \\ u(0) = \lambda. \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ determinare la soluzione specificando l'intervallo massimale di esistenza. Per quali valori di λ la soluzione è unica?

Soluzione. Si tratta di una equazione a variabili separabili. Osserviamo che l'equazione è definita solamente per $|u| \le 4$ e che le condizioni del teorema di esistenza e unicità sono verificate solamente per $|u| < 4$. Le funzioni costanti



$u = 4$ e $u = -4$ sono soluzioni stazionarie dell'equazione differenziale che però non soddisfano la condizione iniziale se $\lambda = 0$. Se $|u(x)| < 4$ si possono separare le variabili:

$$\frac{u'}{\sqrt{16 - u^2}} = 4x^3$$

e integrare

$$\left[\int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}}\right]_{u=u(x)} = x^4 + c.$$

Risulta

$$\int \frac{du}{\sqrt{16 - u^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{4}\right)^2}} = \arcsin\frac{u}{4}$$

da cui

$$\arcsin\frac{u(x)}{4} = x^4 + c.$$

Ponendo $u(0) = \lambda = 0$ si ottiene $c = 0$. Visto che stiamo assumendo che $|u(x)| < 4$ l'arcoseno assumerà valori nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e dunque la nostra soluzione è valida se x^4 è in tale intervallo cioè se

$$|x| < \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}.$$

Con questa condizione la soluzione si scrive nella forma:

$$u(x) = 4\sin(x^4).$$

Osserviamo però che se x tende agli estremi dell'intervallo la funzione $u(x)$ tende a 4 con derivata che (necessariamente) tende a zero. Dunque la funzione può essere incollata alla soluzione stazionaria e dunque la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$ come segue:

$$u(x) = \begin{cases} 4\sin(x^4) & \text{se } |x| < \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}, \\ 4 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ la soluzione è unica in quanto la funzione una volta arrivata al valore $u = 4$ per $x \geq 0$ non può assumere valori superiori a 4 in quanto l'equazione differenziale non sarebbe definita e non può assumere valori inferiori a 4 in quanto $u'(x) \geq 0$ se $x \geq 0$. Discorso analogo si può fare per $x \leq 0$.

Per gli altri valori di $\lambda \in [-4, 4]$ si può ripetere lo stesso ragionamento e trovare la soluzione che risulta essere univocamente definita se $\lambda \in (-4, 4]$. Se $\lambda = -4$ la soluzione può percorrere la soluzione $u = -4$ per un tempo arbitrario e poi staccarsi seguendo la curva $u(x) = 4\sin(x^4 + c)$ per un opportuno valore di c e quindi attaccarsi alla soluzione $u = 4$. Dunque esistono infinite soluzione se $\lambda = -4$. Chiaramente se $|\lambda| > 4$ non ci sono soluzioni perché l'equazione non è definita nel punto iniziale.

$\square$

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = (u^2 - 1)^3 \\ u(0) = \lambda. \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ si dimostri che la soluzione massimale è una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ e si determinino i limiti a $\pm\infty$. Se ne studi la convessità, si dimostri che la funzione è dispari e se ne scriva il polinomio di Taylor di ordine 4 centrato in 0.

Per $\lambda = 2$ si studi la convessità della soluzione e si dimostri che la soluzione massimale ha un asintoto verticale. Facoltativo: si dia una stima del valore dell'ascissa dell'asintoto verticale.

Soluzione. Si tratta di una equazione a variabili separabili, autonoma. Il teorema di esistenza e unicità locale è soddisfatto ovunque. Le funzioni $u(x) = 1$ e $u(x) = -1$ sono soluzioni stazionarie e non possono essere attraversate da altre soluzioni. Dunque se $\lambda \in (-1, 1)$ la soluzione massimale deve avere esistenza globale e rimanere compresa tra -1 e 1. In tale regione si ha $u' < 0$. Le soluzioni dunque sono strettamente decrescenti ed hanno quindi asintoto per $x \to \pm\infty$. L'asintoto non può che essere $u = 1$ per $x \to -\infty$ e $u = -1$ per $x \to +\infty$ perché se $u \to \ell$ allora $u' = (u^2 - 1)^3 \to (\ell^2 - 1)^3$ e in presenza di un asintoto orizzontale l'unico possibile valore per il limite di u' è 0. La derivata seconda soddisfa l'equazione:

$$u''(x) = 3(u^2 - 1)^2 \cdot 2uu' = 6u(u^2 - 1)^5.$$

Dunque $u''(x) \geq 0$ se $u \geq 1$ oppure se $-1 \leq u \leq 0$. Per $\lambda = 0$ la soluzione è strettamente decrescente, ed è quindi negativa per $x > 0$ e positiva per $x < 0$. Dunque è convessa per $x \geq 0$ e concava per $x \leq 0$. La funzione è dispari in quanto se poniamo $v(x) = -u(-x)$ si ha $v(0) = -u(0) = 0$ e

$$v'(x) = u'(-x) = (u^2(-x) - 1)^3 = (v^2(x) - 1)^3$$

e dunque v soddisfa lo stesso problema di Cauchy che definisce u. Essendo la soluzione unica si ha $v(x) = u(x)$ per ogni x e quindi $u(x) = -u(-x)$ cioè u è dispari.

Proseguendo con le derivate si ha

$$u'''(x) = 6u'(u^2 - 1)^5 + 6u \cdot 5(u^2 - 1)^4 \cdot 2uu' = 6(u^2 - 1)^8 + 60u^2(u^2 - 1)^7.$$

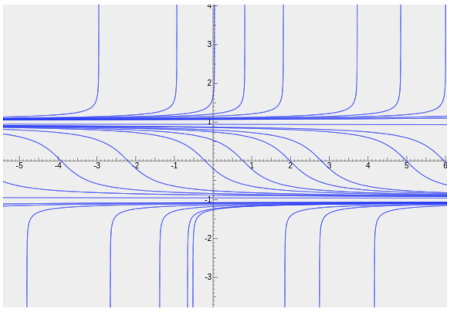
Dunque

$$u(0) = 0, u'(0) = -1, u''(0) = 0, u'''(0) = 6.$$

Visto che u è dispari certamente $u^{(4)}(0) = 0$. Dunque il polinomio di Taylor di ordine 4 è

$$P(x) = -x + \frac{6}{3!}x^3 = -x + x^3.$$

Nel caso $\lambda = 2$ sappiamo che la soluzione non potrà attraversare la soluzione $u = 1$ e dunque sarà $u(x) > 1$. Ma allora $u' > 0$ e quindi u è strettamente



crescente. La soluzione massimale sarà definita su tutta la semiretta $(-\infty, 0]$ e avrà un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. Necessariamente l'asintoto è $u = 1$ come abbiamo già osservato. Dunque l'intervallo massimale di esistenza è della forma $(-\infty, x_0)$ e ci chiediamo se x_0 è finito o $+\infty$. Per $x \to x_0^-$ certamente $u(x) \to +\infty$.

Si può confrontare la soluzione $u(x)$ con la soluzione $v(x)$ di una equazione che sappiamo risolvere più semplicemente. Per $x \geq 0$ si ha $u(x) \geq u(0) = 2$ in quanto u è crescente, dunque $u^2 \geq 4$ e quindi

$$u^2 - 1 \geq \frac{3}{4}u^2$$

da cui

$$u' = (u^2 - 1)^3 \geq \left(\frac{3}{4}u^2\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 u^6.$$

Dunque $u(x) \geq v(x)$ se $v(x)$ risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 v^6 \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

La soluzione $v(x)$ si calcola esplicitamente e si trova

$$\frac{1}{v^5(x)} = \frac{1}{2^5} - 5\left(\frac{3}{4}\right)^3 x$$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2^5} - 5\left(\frac{3}{4}\right)^3 x}}$$

dunque la funzione v presenta un asintoto per $x = \frac{2}{135}$ e quindi anche u deve avere un asintoto verticale nel punto $x_0 \leq \frac{2}{135}$.

Viceversa

$$(u^2 - 1)^3 = u^6 - 3u^4 + 3u^2 - 1 \leq u^6 - 3u^2(u^2 - 1) \leq u^6.$$

Procedendo in modo simile a quanto fatto in precedenza possiamo affermare che la nostra soluzione è minore della soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v'(x) = v^6 \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$v = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{2^5} - 5x}}$$

che ha un asintoto per $x = \frac{1}{160}$ e quindi possiamo concludere che $x_0 \geq \frac{1}{160}$.

In alternativa possiamo utilizzare il metodo di separazione delle variabili possiamo quindi scrivere:

$$\int_0^{x_0} \frac{u'(x)}{(u^2(x)-1)^3}\,dx = \int_0^{x_0} 1\,dx = x_0$$

nell'integrale a sinistra facciamo il cambio di variabile $u = u(x)$ ottenendo quindi (ricordiamo che $u(0) = \lambda = 2$ e $u(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$):

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(u^2-1)^3}\,du = x_0.$$

Visto che $(u^2-1)^3 \sim u^6$ per $u \to +\infty$ l'integrale improprio è convergente e quindi x_0 è finito. Questo significa che la soluzione ha un asintoto verticale per $x \to x_0^-$.

Come in precedenza la formula precedente ci consente anche di stimare il valore di x_0. Possiamo infatti usare le disuguaglianze

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 u^6 \leq (u^2-1)^3 \leq u^6$$

e dunque essendo

$$\int_2^{+\infty} \frac{du}{u^6} = \left[\frac{1}{-5u^5}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{160}$$

si ottiene

$$\frac{1}{160} \leq x_0 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{1}{160} = \frac{2}{135}.$$

□