Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta "ridotta" del 13 Luglio 2020

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1.

1. Sia α un ordinale. Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:
   (a) $2^\alpha = \omega^\alpha$.
   (b) $\alpha = \omega \cdot \alpha$.
   (c) α è multiplo di ω^ω, cioè $\alpha = \omega^\omega \cdot \beta$ per qualche β.
2. Si consideri la funzione *fattoriale* per ordinali definita ponendo $0! = 1$; $(\beta+1)! = \beta!(\beta+1)$; e $\lambda! = (\bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma!)\lambda$ se λ è limite.
   (a) Dimostrare che $\alpha! = \alpha$ se e solo se $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$.
   (b) Determinare la forma normale di Cantor di $(\omega+n)!$ per ogni $n < \omega$.
   (c) * Determinare la forma normale di Cantor di $\omega^2!$.

Soluzione. (1). Anzitutto notiamo che $2^\omega = \bigcup_{n<\omega} 2^n = \omega$.

(b) $\Rightarrow$ *(a)*. $2^\alpha = 2^{\omega\alpha} = (2^\omega)^\alpha = \omega^\alpha$.

(a) $\Rightarrow$ *(b)*. Se $\alpha < \omega\alpha$ allora $2^\alpha < 2^{\omega\alpha} = (2^\omega)^\alpha = \omega^\alpha$.

(b) $\Rightarrow$ *(c)*. Con la divisione euclidea, scriviamo $\alpha = \omega^\omega\beta + \rho$ dove $\rho < \omega^\omega$. Allora

$$\omega^\omega\beta + \rho \;=\; \alpha \;=\; \omega \cdot \alpha \;=\; \omega(\omega^\omega\beta + \rho) \;=\; \omega\omega^\omega\beta + \omega\rho \;=\; \omega^{1+\omega}\beta + \omega\rho \;=\; \omega^\omega\beta + \omega\rho.$$

Deve quindi essere $\rho = \omega\rho$. Questo accade se $\rho = 0$. Vediamo ora che questo è l'unico caso possibile. Intanto nessun $\rho \neq 0$ finito soddisfa quell'uguaglianza. Se $\omega \leq \rho < \omega^\omega$, prendiamo $n \in \omega$ tale che $\omega^n \leq \rho < \omega^{n+1}$. Ma allora $\omega\rho \geq \omega\,\omega^n = \omega^{n+1} > \rho$.

(c) $\Rightarrow$ *(b)*. $\omega\alpha = \omega\omega^\omega\beta = \omega^{1+\omega}\beta = \omega^\omega\beta = \alpha$.

(2a). Sia $\alpha > 2$. Se $\alpha = \beta + 1$ è un successore, allora $\beta > 1$ e $(\beta+1)! \geq \beta(\beta+1) = \beta^2 + \beta \geq \beta + \beta > \beta + 1$. Se $\alpha = \lambda$ è limite, allora

$$\lambda! \;=\; \left(\bigcup_{\beta<\lambda} \beta!\right) \cdot \lambda \;\geq\; \lambda \cdot \lambda \;>\; \lambda.$$

(2b). Il risultato è

$$(\omega+n)! \;=\; \omega^{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \omega^{n+2-i}(n+1-i).$$

Intanto $\omega! = \left(\bigcup_{n<\omega} n!\right) \cdot \omega = \omega \cdot \omega = \omega^2$ e $(\omega+1)! = \omega!(\omega+1) = \omega^2(\omega+1) = \omega^3 + \omega^2$. Notiamo poi che $(\omega+1)\cdot(\omega+2) = (\omega+1)\cdot\omega + (\omega+1)\cdot 2 = \omega^2 + \omega 2 + 1$; $(\omega+1)\cdot(\omega+2)\cdot(\omega+3) = (\omega^2+\omega 2+1)(\omega+3) = (\omega^2+\omega 2+1)\cdot\omega + (\omega^2+\omega 2+1)\cdot 3 = \omega^3 + \omega^2 3 + \omega 2 + 1$. Iterando si ottiene la formula $\prod_{i=1}^n(\omega+i) = \omega^n + \sum_{i=1}^n \omega^{n-i}(n+1-i)$. Quindi,

$$(\omega+n)! \;=\; \omega! \cdot \prod_{i=1}^{n}(\omega+i) \;=\; \omega^2 \cdot \left(\omega^n + \sum_{i=1}^{n} \omega^{n-i}(n+1-i)\right) \;=\; \omega^{n+2} + \sum_{i=1}^{n} \omega^{n+2-i}(n+1-i).$$

(2c). Il risultato è $\omega^2! = \omega^{\omega^2+2}$. Abbiamo visto sopra che $\omega^{n+2} \leq (\omega+n)! \leq \omega^{n+3}$; quindi $\bigcup_{\gamma<\omega+\omega}\gamma! = \bigcup_{n<\omega}(\omega+n)! = \omega^\omega$, e perciò $(\omega+\omega)! = (\sup_{\gamma<\omega+\omega}\gamma!)(\omega+\omega) = \omega^\omega(\omega 2) = \omega^{\omega+1}2$. Inoltre,

$$(\omega 3)! = \left(\bigcup_{n<\omega}(\omega 2+n)!\right)\cdot\omega 3 = \left(\bigcup_{n<\omega}((\omega 2)!\cdot(\omega 2+1)\cdot\ldots\cdot(\omega 2+n))\right)\cdot\omega 3 = \omega^{\omega+\omega}\cdot(\omega 3) = \omega^{\omega 2+1}\cdot 3.$$

Notiamo infatti che

$$\omega^{\omega+\omega} = \bigcup_{n<\omega}\omega^\omega\cdot(\omega\cdot\ldots\cdot\omega) \leq \bigcup_{n<\omega}((\omega 2)!\cdot(\omega 2+1)\cdot\ldots\cdot(\omega 2+n)) \leq \bigcup_{n<\omega}\omega^{\omega+2}\cdot\omega^2\cdot\ldots\cdot\omega^2 = \omega^{\omega+\omega}.$$

Iterando si ottiene la formula $(\omega n)! = \omega^{\omega(n-1)+1}\cdot n$, e quindi

$$\omega^2! = \left(\bigcup_{n<\omega}(\omega n)!\right)\cdot\omega^2 = \left(\bigcup_{n<\omega}\left(\omega^{\omega(n-1)+1}\cdot n\right)\right)\cdot\omega^2 = \omega^{\omega\cdot\omega}\cdot\omega^2 = \omega^{\omega^2+2}$$

Esercizio 2.

1. Dimostrare che le seguenti due proprietà sono equivalenti:
   (a) Vale l'ipotesi generalizzata del continuo (GCH), cioè $2^\kappa = \kappa^+$ per ogni cardinale infinito κ.
   (b) Se κ è un cardinale infinito regolare allora $\sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu = \kappa$.
2. Sia $\mathcal{G}$ è una famiglia di insiemi, sia $\langle\mathcal{G}\rangle$ la σ-algebra generata, e sia κ un cardinale infinito.
   (a) Dimostrare che se $|\mathcal{G}| \leq \kappa$ allora $|\langle\mathcal{G}\rangle| \leq \kappa^{\aleph_0}$.
   (b) Trovare un esempio di famiglia infinita *non numerabile* di insiemi $\mathcal{G}$ tale che $|\langle\mathcal{G}\rangle| > |\mathcal{G}|$.

N.B. Si può usare il seguente fatto visto a lezione. Se $\mathcal{G}$ è una famiglia di insiemi, allora la σ-algebra generata è uguale a $\langle\mathcal{G}\rangle = \bigcup_{\alpha<\omega_1}\mathcal{G}_\alpha$, dove si definisce per ricorsione:

$$\begin{cases}\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}\\ \mathcal{G}_{\gamma+1} = \mathcal{G}_\alpha \cup \{G^c \mid G\in\mathcal{G}_\alpha\} \cup \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n \mid G_n\in\mathcal{G}_\alpha\right\} \cup \left\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n \mid G_n\in\mathcal{G}_\alpha\right\}\\ \mathcal{G}_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda}\mathcal{G}_\gamma \ \text{ se } \lambda \text{ è limite.}\end{cases}$$

Soluzione. (1). $(a) \Rightarrow (b)$. Sia κ regolare. Se $\kappa = \mu^+$ è un successore, allora $\sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu = \kappa^\mu = (\mu^+)^\mu = \text{(Hausdorff)} = \mu^\mu\cdot\mu^+ = 2^\mu\cdot\mu^+ = \text{(GCH)} = \mu^+ = \kappa$. Se invece κ è un cardinale limite, per ogni $\nu<\kappa$ vale la formula $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu$, visto che l'esponente $\nu < \kappa = \mathrm{cof}(\kappa)$. Ma (GCH) implica che ogni cardinale limite è limite forte, dunque $\mu,\nu<\kappa \Rightarrow \mu^\nu<\kappa$, e quindi $\kappa^\nu = \sup_{\mu<\kappa}\mu^\nu = \kappa$. Concludiamo che $\sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu = \sup_{\nu<\kappa}\kappa = \kappa$.

$(a) \Rightarrow (b)$. Soluzione alternativa. Valgono banalmente le disuguaglianze $\sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$. Tuttavia non può essere $\sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu = \kappa^+$, altrimenti sarebbe $\mathrm{cof}(\kappa^+) \leq \kappa$, il che è assurdo. Concludiamo allora che $\kappa \leq \sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu < \kappa^+$, da cui la tesi.

$(b) \Rightarrow (a)$. Se non vale (GCH), possiamo prendere un cardinale infinito μ tale che $2^\mu > \mu^+$. Il cardinale $\kappa = \mu^+$ è regolare perché successore, ma $\sup_{\nu<\kappa}\kappa^\nu = \kappa^\mu = (\mu^+)^\mu = \text{(Hausdorff)} = \mu^\mu\,\mu^+ = 2^\mu\mu^+ > \mu^+ = \kappa$, contro la proprietà (1).

(2a). Per induzione transfinita, si dimostra che $|\mathcal{G}_\alpha| \leq \kappa^{\aleph_0}$ per ogni $\alpha<\omega_1$. Il caso $\alpha = 0$ segue banalmente dall'ipotesi: $|\mathcal{G}_0| = \kappa \leq \kappa^{\aleph_0}$. Nel caso successore denotiamo per brevità:

- $\mathcal{G}'_\gamma = \{G^c \mid G\in\mathcal{G}_\alpha\}$,

- $\mathcal{G}''_\gamma = \{\bigcup_{n\in\omega} G_n \mid G_n \in \mathcal{G}_\alpha\}$, e
- $\mathcal{G}'''_\gamma = \{\bigcap_{n\in\omega} G_n \mid G_n \in \mathcal{G}_\alpha\}$.

È immediato che $|\mathcal{G}'_\gamma| = |\mathcal{G}_\gamma| \leq \kappa^{\aleph_0}$. Inoltre le funzioni

- $\Phi : \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathcal{G}_\gamma) \to \mathcal{G}''_\gamma$ dove $\Phi(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$, e
- $\Psi : \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathcal{G}_\gamma) \to \mathcal{G}'''_\gamma$ dove $\Psi_1(f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n)$

sono suriettive. Quindi $|\mathcal{G}''_\gamma| \leq |\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathcal{G}_\gamma)| = |\mathcal{G}_\gamma|^{\aleph_0} \leq (\kappa^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0}$; e analogamente $|\mathcal{G}'''_\gamma| \leq \kappa^{\aleph_0}$. Allora

$$|\mathcal{G}_{\gamma+1}| \;=\; |\mathcal{G}'_\gamma \cup \mathcal{G}''_\gamma \cup \mathcal{G}'''_\gamma| \;=\; |\mathcal{G}'_\gamma| + |\mathcal{G}''_\gamma| + |\mathcal{G}'''_\gamma| \;\leq\; \kappa^{\aleph_0}.$$

Nel caso limite:

$$|\mathcal{G}_\lambda| \;\leq\; \sum_{\gamma<\lambda} |\mathcal{G}_\gamma| \;\leq\; \sum_{\gamma<\lambda} \kappa^{\aleph_0} \;=\; \max\{\kappa^{\aleph_0}, |\lambda|\} \;\leq\; \max\{\kappa^{\aleph_0}, \aleph_1\} =\; \kappa^{\aleph_0}.$$

Analogamente al caso limite, segue che

$$|\langle\mathcal{G}\rangle| \;=\; |\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{G}_\alpha| \;\leq\; \kappa^{\aleph_0}.$$

(2b). Un possibile esempio si ottiene considerando la famiglia

$$\mathcal{G} \;:=\; \{A \subseteq \beth_\omega \mid A \text{ è limitato}\}.$$

Notiamo che $|\mathcal{G}| = \beth_\omega$. Infatti, per ogni n, tutti i sottoinsiemi di $\beth_n$ appartengono a $\mathcal{G}$; quindi $\beth_{n+1} = |\mathcal{P}(\beth_n)| \leq |\mathcal{G}|$, e perciò $\beth_\omega = \sup_n \beth_{n+1} \leq |\mathcal{G}|$. Viceversa, osserviamo che che ogni $A \in \mathcal{G}$ è incluso in qualche $\beth_n$, e quindi

$$|\mathcal{G}| \;=\; |\bigcup_{n<\omega} \mathcal{P}(\beth_n)| \;\leq\; \sum_{n<\omega} |\mathcal{P}(\beth_n)| \;=\; \sum_{n<\omega} \beth_{n+1} \;=\; \max\left\{\aleph_0; \sup_{n<\omega} \beth_{n+1}\right\} \;=\; \beth_\omega.$$

Vediamo adesso che la σ-algebra generata $\langle\mathcal{G}\rangle = \mathcal{P}(\beth_\omega)$. L'inclusione $\langle\mathcal{G}\rangle \subseteq \mathcal{P}(\beth_\omega)$ è ovvia perché $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(\beth_\omega)$ e $\mathcal{P}(\beth_\omega)$ è banalmente una σ-algebra. Viceversa, osserviamo che ogni $A \subseteq \beth_\omega$ è unione numerabile di elementi di $\mathcal{G}$, visto che $A = \bigcup_{n<\omega}(A \cap \beth_n)$. Otteniamo così l'esempio desiderato:

$$|\mathcal{G}| \;=\; \beth_\omega \;<\; \beth_{\omega+1} \;=\; |\mathcal{P}(\beth_\omega)| \;=\; |\langle\mathcal{G}\rangle|.$$