Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 3 Giugno 2024

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [10 punti] Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $c_0 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f(n) = 0\}$.
2. $\ell^\infty = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists L \in \mathbb{R}^+ \text{ t.c. } |f(n)| \leq L \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}$.
3. $X_1 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ è debolmente decrescente}\}$.
4. $X_2 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(1) = 1 \text{ e } n < f(n) < n^2 \text{ per ogni } n \geq 2\}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Scrivere il seguente ordinale in forma normale di Cantor: $(\omega^2 + \omega + 1)^2$.
2. Dimostrare che $\gamma \cdot \beta = \beta$ se e solo se esiste δ tale che $\beta = \gamma^\omega \cdot \delta$.

Esercizio 3. [10 punti] Supponiamo che valga l'*ipotesi generalizzata del continuo*, cioè che $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ per ogni α.

1. Dimostrare che: $(\aleph_n)^{\aleph_0} = \aleph_n$ per ogni $1 \leq n < \omega$.
2. Dimostrare che: $(\aleph_n)^{\aleph_m} = \aleph_n$ per ogni $0 < m < n < \omega$.
3. Dimostrare che: $(\aleph_\omega)^{\aleph_m} = \aleph_{\omega+1}$ per ogni $0 \leq m < \omega$.
4. Determinare il valore di $(\aleph_{\omega_1})^{\aleph_\alpha}$ al variare di $1 \leq \alpha < \omega_1$.

Esercizio 4. [8 punti]

1. Determinare il minimo α tale che l'insieme di funzioni $\mathrm{Fun}(\omega, \omega) \in V_\alpha$.
2. Dimostrare che la seguente proprietà vale se e solo se $\mathrm{cof}(\alpha) > \aleph_0$:
   - Per ogni $A \subseteq V_\alpha$, se $|A| \leq \aleph_0$ allora $A \in V_\alpha$.
3. * È vero che per ogni cardinale limite forte κ, la famiglia dei suoi sottoinsiemi numerabili ha cardinalità κ? Se la risposta è si, darne una dimostrazione; se la risposta è no trovare un controesempio.