Elementi di Teoria degli Insiemi
Prova scritta del 22 Luglio 2024

Cognome e nome: ....

E-mail (per eventuali comunicazioni): ....

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. [9 punti] Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Per ricorsione transfinita su $\alpha < \omega_1$ definiamo

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}; \\ \mathcal{F}_{\alpha+1} = \left\{ \bigcup_{n<\omega} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha \text{ per ogni } n < \omega \right\}; \\ \mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \mathcal{F}_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che $\widehat{\mathcal{F}} := \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$ è la più piccola famiglia che include $\mathcal{F}$ ed è chiusa per unioni numerabili, cioè se $A_n \in \widehat{\mathcal{F}}$ per ogni $n \in \omega$ allora anche l'unione $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \widehat{\mathcal{F}}$.
2. Supponiamo che la cardinalità $|\mathcal{F}| = \kappa$ sia tale che $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$. Dimostrare che allora $|\widehat{\mathcal{F}}| = \kappa$.
3. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{P}(\aleph_n)$. Assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo, determinare le cardinalità di $\mathcal{F}$ e di $\widehat{\mathcal{F}}$.

Esercizio 2. [8 punti]

1. Scrivere in forma normale di Cantor l'ordinale $(\omega^2 \cdot 3 + 7)^4$.
2. Trovare quoziente e resto della divisione euclidea di $\omega^{\omega+1} + \omega^5 \cdot 2 + \omega^4$ per $\omega^4 + 2$.

Esercizio 3. [8 punti]

1. Dimostrare che se κ è un cardinale tale che $\kappa^{<\kappa} := \sup_{\nu<\kappa} \kappa^\nu = \kappa$ allora κ è regolare.
2. Dimostrare che se κ è fortemente inaccessibile, allora $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.
3. Dimostrare che la seguente uguaglianza vale per ogni ordinale α:

$$(\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_\alpha} = (\aleph_{\omega+\omega})^{\aleph_0} \cdot (\aleph_\omega)^{\aleph_\alpha}.$$

Esercizio 4. [8 punti] Per ogni ordinale α, considera la seguente proprietà:

- $P(\alpha)$: $|A| < |\alpha|$ per ogni $A \in V_\alpha$.

Dimostra che:

1. Se l'ordinale α soddisfa $P(\alpha)$ allora $\alpha = \kappa$ è un cardinale.
2. Ogni cardinale $\kappa > \aleph_0$ che soddisfa $P(\kappa)$ è un punto fisso della funzione-classe *beth*, cioè $\kappa = \beth_\kappa$.
3. Vale l'implicazione inversa nella (2)? (Se sì, darne una dimostrazione; se no fornire un controesempio).