Elementi di Teoria degli Insiemi — Prova scritta del 9 Settembre 2024

Tutte le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1 (11 punti)**.** Per ogni cardinale κ, sia $\kappa^{<\kappa} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu < \kappa \text{ cardinale}\}$.

1. Trovare il valore di $\kappa^{<\kappa}$ quando $\kappa = \aleph_0$ e quando $\kappa = \aleph_1$.
2. Dimostrare che se κ è un cardinale singolare allora $\kappa^{<\kappa} > \kappa$.
3. Dimostrare che se per ogni cardinale infinito κ *regolare* si ha $\kappa^{<\kappa} = \kappa$, allora vale l'*ipotesi generalizzata del continuo* GCH.
4. Dimostrare che vale anche l'implicazione inversa nella (4), cioè che se vale l'*ipotesi generalizzata del continuo* GCH allora per ogni cardinale infinito κ *regolare*, si ha $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

Soluzione. (1). $(\aleph_0)^{<\aleph_0} = \sup_{n<\aleph_0}(\aleph_0)^n = \sup_{n<\aleph_0}\aleph_0 = \aleph_0$. Inoltre $(\aleph_1)^{<\aleph_1} = \sup_{\nu<\aleph_1}(\aleph_0)^\nu = (\aleph_1)^{\aleph_0} = (\text{Hausdorff}) = \max\{\aleph_1, (\aleph_0)^{\aleph_0}\} = \max\{\aleph_1, 2^{\aleph_0}\} = 2^{\aleph_0}$.

(2). Se κ è un cardinale singolare, allora $\mathrm{cof}(\kappa) < \kappa$ e quindi $\kappa^{<\kappa} \geq \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} > \kappa$.

(3). Mostriamo che se non vale l'ipotesi generalizzata del continuo allora esistono cardinali regolari tali che $\kappa^{<\kappa} > \kappa$. Infatti, sia α tale che $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_{\alpha+1}$, e sia $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$. Chiaramente κ è regolare perché successore, ed abbiamo che $\kappa^{<\kappa} = (\aleph_{\alpha+1})^{\aleph_\alpha} = (\text{Hausdorff}) = \max\{\aleph_{\alpha+1}, (\aleph_\alpha)^{\aleph_\alpha}\} = \max\{\aleph_{\alpha+1}, 2^{\aleph_\alpha}\} = 2^{\aleph_\alpha} > \kappa$.

(4). Supponiamo prima che $\kappa = \nu^+$ sia un successore. Allora $\kappa^{<\kappa} = (\nu^+)^\nu = (\text{Hausdorff}) = \max\{\nu^+, \nu^\nu\} = \max\{\nu^+, 2^\nu\} = (\text{GHC}) = \nu^+ = \kappa$.

Supponiamo ora che il cardinale regolare κ sia limite. Fissiamo un qualunque cardinale $\nu < \kappa$ e mostriamo che $\kappa^\nu = \kappa$. Questo garantisce che $\kappa^{<\kappa} = \kappa$.

Visto che κ è regolare, ogni funzione $f : \nu \to \kappa$ è limitata, e quindi esiste un ordinale $\alpha < \kappa$ tale che $f : \nu \to \alpha$. Allora si ha:

$$\kappa^\nu = |\mathrm{Fun}(\nu, \kappa)| = |\bigcup_{\alpha<\kappa} \mathrm{Fun}(\nu, \alpha)| = \sum_{\alpha<\kappa} |\mathrm{Fun}(\nu, \alpha)| = \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\nu = \max\{\kappa, \sup_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\nu\}.$$

Notiamo che se $\mu = \max\{|\alpha|, \nu\}$, allora $|\alpha|^\nu \leq \mu^\mu = 2^\mu = (\text{poichè vale GCH}) = \mu^+$. Visto che $|\alpha|, \nu < \kappa$, abbiamo che $\mu = \max\{|\alpha|, \nu\} < \kappa$, e quindi anche $\mu^+ < \kappa$, visto che κ è limite. Dunque $\sup_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\nu \leq \kappa$ e possiamo concludere che $\kappa^\nu = \kappa$.

Esercizio 2 (9 punti)**.** Dimostrare le seguenti proprietà relative all'esponenziazione tra ordinali.

1. $n^\omega = k^\omega$ per tutti gli ordinali finiti $n, k < \omega$ maggiori di 1.
2. $2^{(\omega^2)} = \omega \cdot 2^{(\omega^2)}$.
3. Se $\omega < \beta \leq \omega^2$ allora $2^\beta > \beta$.

Soluzione. (1). Osserviamo che $n^\omega = \omega$ per ogni numero naturale $n < \omega$ con $n \geq 2$. Infatti, per definizione, $n^\omega = \bigcup_{i<\omega} n^i$, e chiaramente $\bigcup_{i<\omega} n^i = \omega$.

(2). Per definizione, $2^{(\omega^2)} = \bigcup_{\gamma<\omega^2} 2^\gamma = \bigcup_{n<\omega} 2^{(\omega\cdot n)}$. Notiamo che per ogni $n < \omega$ si ha $2^{(\omega\cdot n)} = (2^\omega)^n = \omega^n$, per quanto visto al punto (1). Concludiamo allora che $2^{(\omega^2)} = \bigcup_{n<\omega} \omega^n = \omega^\omega$, e quindi $\omega \cdot 2^{(\omega^2)} = \omega \cdot \omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega = 2^{(\omega^2)}$.

(3). Se $\beta = \omega^2$, allora $2^\beta = 2^{(\omega^2)} =$ (per il punto (3)) $= \omega^\omega > \omega^2 = \beta$. Se $\omega < \beta < \omega^2$, con la divisione euclidea possiamo scrivere $\beta = \omega \cdot n + \rho$ dove $1 \leq n < \omega$ e $\rho < \omega$. Se $n = 1$ allora necessariamente $\rho \geq 1$, visto che $\beta > \omega$. In questo caso abbiamo che $2^\beta = 2^{(\omega+\rho)} = 2^\omega \cdot 2^\rho = \omega \cdot 2^\rho \geq \omega \cdot 2 > \omega + \rho = \beta$. Se invece $n \geq 2$, abbiamo che $2^\beta \geq 2^{\omega \cdot 2} = (2^\omega)^2 = \omega^2 > \omega \cdot n + \rho = \beta$.

Esercizio 3 (12 punti)**.** Consideriamo la gerarchia di von Neumann, definita per ricorsione transfinita ponendo

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma \text{ se } \lambda \text{ è limite.} \end{cases}$$

1. Dimostrare che se $X \in V_\alpha$ allora $\bigcup X = \{y \mid \exists x \in X \ y \in x\} \in V_\alpha$.
2. Dimostrare che se $R \in V_\alpha$ è una relazione binaria, allora $\mathrm{dom}(R), \mathrm{Imm}(R) \in V_\alpha$.
3. Dimostrare che non esistono ordinali $\alpha > 0$ tali che $V_\alpha \subseteq V_\alpha \times V_\alpha$.
4. Esistono ordinali $\alpha > 0$ tali che $V_\alpha \times V_\alpha \subseteq V_\alpha$?

   [Se la risposta è negativa darne una dimostrazione; se è positiva fornire esempi.]
5. Determinare tutti gli ordinali α per i quali vale la seguente proprietà:
   - $\mathrm{Fun}(\omega, \alpha) \subseteq V_\alpha$.
6. Determinare tutte le coppie di ordinali (α, β) che soddisfano la seguente proprietà:
   - Ogni funzione f con $\mathrm{dom}(f) \subseteq V_\alpha$ e $\mathrm{Imm}(f) \subseteq \beta$ appartiene a V_β.

Soluzione. (1). Supponiamo prima che $\alpha = \beta + 1$ sia un ordinale successore. Se $x \in X \in V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)$ allora $x \in V_\beta$ e quindi $x \subseteq V_\beta$, per la transitività di V_β. Abbiamo allora che $\bigcup X = \bigcup_{x \in X} x \subseteq V_\beta \Rightarrow \bigcup X \in V_{\beta+1}$. Se invece $\alpha = \lambda$ è un ordinale limite, allora $X \in V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$ implica che $X \in V_\beta$ per un opportuno $\beta < \lambda$. Ma allora $X \in V_{\beta+1}$ e quindi $\bigcup X \in V_{\beta+1}$ per il punto precedente. Visto che $\beta + 1 < \lambda$, concludiamo che $\bigcup X \in V_\lambda$, come voluto.

(2). Per definizione, $x \in \mathrm{dom}(R)$ se e solo se esiste y tale che la coppia ordinata $(x, y) \in R$. Adesso, $x \in \{x\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\} = (x, y) \in R$, quindi x è un elemento di un elemento di un elemento di R, cioè $x \in \bigcup\bigcup R$. Ma per il punto (1), $R \in V_\alpha \Rightarrow \bigcup R \in V_\alpha \Rightarrow \bigcup\bigcup R \in V_\alpha$, e visto che $\mathrm{dom}(R) \subseteq \bigcup\bigcup R$, possiamo concludere che $\mathrm{dom}(R) \in V_\alpha$. La dimostrazione che $R \in V_\alpha \Rightarrow \mathrm{Imm}(R) \in V_\alpha$ è del tutto analoga

(3). Basta notare che $\emptyset \in V_\alpha$, e che nessuna coppia ordinata è uguale all'insieme vuoto.

(4). Sì, tutti gli ordinali limite λ hanno la proprietà che $V_\lambda \times V_\lambda \subseteq V_\lambda$. Infatti ogni coppia ordinata (a, b) dove $a, b \in V_\lambda$ appartiene a V_λ. Per vederlo, dati $a, b \in V_\lambda$, prendiamo $\alpha < \lambda$ tale che $a, b \in V_\alpha$. Allora $\{a\}, \{a, b\} \subseteq V_\alpha \Rightarrow \{a\}, \{a, b\} \in V_{\alpha+1} \Rightarrow (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq V_{\alpha+1} \Rightarrow (a, b) \in V_{\alpha+2} \subseteq V_\lambda$.

(5). Gli ordinali α che soddisfano la proprietà richiesta sono tutti e soli gli ordinali α tali che $\mathrm{cof}(\alpha) > \aleph_0$. Supponiamo prima che $\mathrm{cof}(\alpha) > \aleph_0$. In questo caso, ogni funzione $f : \omega \to \alpha$ è necessariamente limitata, e quindi esiste $\beta < \alpha$ tale che $f : \omega \to \beta$. Se $\gamma = \max\{\omega, \beta\}$, abbiamo che $f \subseteq \omega \times \beta \subseteq \gamma \times \gamma$. Adesso $\gamma \in V_{\gamma+1} \Rightarrow \gamma \times \gamma \in V_{\gamma+n}$ per un opportuno n finito[1], e quindi $f \subseteq \gamma \times \gamma \in V_{\gamma+n} \Rightarrow f \in V_{\gamma+n}$. Infine osserviamo che $\mathrm{cof}(\alpha) > \aleph_0$ implica in particolare che $\alpha > \omega$ e che α è limite; dunque $\gamma + n < \alpha$ e possiamo concludere che $f \in V_\alpha$. Viceversa, se $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \aleph_0$, allora esiste una funzione $f : \omega \to \alpha$ illimitata. Notiamo che questo significa che $\bigcup \mathrm{Imm}(f) = \alpha$. Se

[1] In realtà si ha che $\gamma \times \gamma \in V_{\gamma+3}$, ma qui non è necessario dimostrarlo.

per assurdo fosse $f \in V_\alpha$ allora, usando i punti (1) e (2), avremmo che anche $\mathrm{Imm}(f) \in V_\alpha$ e quindi $\alpha = \bigcup \mathrm{Imm}(f) \in V_\alpha$, il che è assurdo.

(6). Una coppia di ordinali (α, β) soddisfa la proprietà richiesta se e solo se $\mathrm{cof}(\alpha) > |V_\alpha|$. La dimostrazione è del tutto simile a quella del punto precedente.

Nel dettaglio, se $\alpha = 0$ allora ogni $\beta > 0$ va bene, perchè $V_\alpha = \emptyset$, quindi l'unica funzione con dominio V_α è la funzione vuota, e l'insieme vuoto appartiene ad ogni V_β con $\beta > 0$. Se invece $0 < \alpha < \omega$ è finito, allora anche V_α è finito, e gli ordinali β che vanno bene sono quelli limite, visto che in questo caso $\mathrm{cof}(\beta) \geq \aleph_0 > |V_\alpha|$, mentre gli ordinali successori hanno cofinalità 1, quindi minore o uguale di $|V_\alpha|$. Infine, se $\alpha = \omega + \gamma$ è infinito, allora le coppie che vanno bene sono quelle in cui $\mathrm{cof}(\beta) > \beth_\gamma$, visto che $|V_{\omega+\gamma}| = \beth_\gamma$.