Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

penalità	totale

27 Gennaio 2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.[8pt.] Si determinino tutte le soluzioni complesse del seguente sistema:

$$\begin{cases} z\left(\bar{z}-i\right)^2 = z\left(2iz-4\right) \\ z^5 - 9z = 0 \end{cases}$$

Noto che $z = 0$ è soluzione del sistema, quindi posso supporre $z \neq 0$.
Primo metodo.
Comincio a risolvere la prima equazione.
$\bar{z}^2 - 1 - 2i\bar{z} = 2iz - 4$
$\bar{z}^2 - 2i\left(\bar{z}+z\right) + 3 = 0$
$\bar{z}^2 - 4i\mathrm{Re}\left(\bar{z}\right) + 3 = 0$
$\bar{z} = a + ib$
$a^2 - b^2 + 3 + 2ai\left(b-2\right) = 0$
$\begin{cases} a^2 - b^2 + 3 = 0 \\ 2a\left(b-2\right) = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} a = 0 \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} a^2 = -1 \quad (\textit{impossibile}) \\ b = 2 \end{cases}$
Dunque le soluzioni della prima equazione (oltre a 0) sono $i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}$.
Verifico che tutte sono anche soluzione della seconda equazione: $(\pm i)^4\left(\sqrt{3}\right)^4 = 9$.
Secondo metodo.
Risolvo la seconda equazione.
$z^4 = 9$
Quindi $|z| = \sqrt{3}$ e $\arg\left(z\right) = \frac{2k\pi}{4} \in [0, 2\pi)$.
Dunque ci sono 4 possibilità: $k = 0, 1, 2, 3$, che danno $\arg\left(z\right) = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.
Quindi le soluzioni della seconda equazione (oltre a 0) sono $\pm\sqrt{3}, \pm i\sqrt{3}$.
Devo verificare quali di queste sono anche soluzione della prima equazione.
Ad esempio, se $z = \sqrt{3}$, allora $\left(\bar{z}-i\right)^2 - 2iz + 4 = \left(3 - 1 - 2i\sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{3} + 4 = 2 - 4i\sqrt{3} \neq 0$, quindi $\sqrt{3}$ non è soluzione.

Un calcolo simile mostra che $z = -\sqrt{3}$ non è soluzione della prima equazione, mentre $\pm i\sqrt{3}$ sì.

Esercizio 2. [10pt.] Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri l'applicazione lineare

$$T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

definita da:

$$T_k\,(x, y, z, u) = (x + y + 2z + u, x + 2y + 4z + u, 2x + 2y + 4z + 3u, -x - 2y + (k - 4)z + 2u)\,.$$

Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si determini:

(2a). la matrice A_k associata a T_k rispetto alla base canonica;
(2b). la dimensione dell'immagine e del nucleo di T_k;
(2c). una base dell'immagine e del nucelo di T_k;
(2d). se T_k sia iniettiva e/o surgettiva.

(2a)

La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & k-4 & 2 \end{pmatrix}$.

(2b)&(2d)

Facciamo la riduzione di Gauss, applicando le seguenti operazioni: $\rho_2 - \rho_1; \rho_3 - 2\rho_1; \rho_4 + \rho_2; \rho_3 \leftrightarrow \rho_4$ e otteniamo $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Primo caso.

Se $k \neq 0$, allora la dimensione dell'immagine è 4 e la dimensione del nucleo è 0, quindi T_k è sia iniettiva che surgettiva.

Secondo caso.

Se $k = 0$, allora la dimensione dell'immagine è 3 e la dimensione del nucleo è 1. Quindi T_0 non è né iniettiva né surgettiva.

(2c)

Primo caso.

Se $k \neq 0$, allora una base dell'immagine è data dalle 4 colonne di A_k e il nucleo consiste solo nello zero.

Secondo caso.

Se $k = 0$, allora una base dell'immagine è data dalle colonne pivot di A_0, ovvero la prima, la seconda e la quarta.

Per trovare una base del nucleo, trovo una soluzione speciale, con $z = 1$. Risolvo dunque il sistema $\begin{cases} x + y + 2z + u = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = 1 \\ u = 0 \end{cases}$ e trovo il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. **[10+4pt.]** Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 5 & -4 & 5 \\ 9 & -9 & 10 \end{pmatrix}$,

(3a). calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e la dimensione degli autospazi di A;

(3b). stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, trovare la forma diagonale e una base di autovettori;

(3c). **(FACOLTATIVO)** **[4pt.]** calcolare le potenze A^n $(n \in \mathbb{N})$.

(3a)&(3b)

Il polinomio caratteristico è $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$.

Gli autovalori sono $1, 2$.

Calcolo la dimensione degli autospazi $E_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$:

per $\lambda = 2$, $A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 5 & -6 & 5 \\ 9 & -9 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 0 & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque $\dim(E_2) = 1$ e un autovettore è dato dalla soluzione speciale $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{3} \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

per $\lambda = 1$, $A - I = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 5 & -5 & 5 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque $\dim(E_1) = 2$ e una base di autovettori è data dalle soluzione speciali $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dunque A è diagonalizzabile.

La forma diagonale è $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(3c) **(FACOLTATIVO)** **[4pt.]**

Usiamo la forma diagonale e la matrice diagonalizzante per trovare le potenze di A.

La matrice diagonalizzante ha come colonne gli autovettori della base: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Con il metodo di Gauss-Jordan, trovo l'inversa $P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -5 \\ -9 & 9 & -8 \\ 9 & -9 & 9 \end{pmatrix}$.

Verifico che $D = P^{-1}AP$ e dunque $A^n = PD^nP^{-1}$.

Visto che $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, eseguo quest'ultima moltiplicazione e ottengo:

$$A^n = \begin{pmatrix} 4-3\cdot 2^n & 3\cdot 2^n - 3 & 3 - 3\cdot 2^n \\ 5\cdot 2^n - 5 & 6 - 5\cdot 2^n & 5\cdot 2^n - 5 \\ 9\cdot 2^n - 9 & 9 - 9\cdot 2^n & 9\cdot 2^n - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\left(1-3\cdot 2^{n-2}\right) & 3\left(2^n-1\right) & 3\left(1-2^n\right) \\ 5\left(2^n-1\right) & 2\left(3-5\cdot 2^{n-1}\right) & 5\left(2^n-1\right) \\ 9\left(2^n-1\right) & 9\left(1-2^n\right) & 8\left(9\cdot 2^{n-3}-1\right) \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. [6pt.] In una scatola ci sono delle monete da 1, 5 e 10 centesimi, per un totale di 7 monete. Il numero di monete da 5 centesimi è il doppio del numero di monete da 10 centesimi, e il valore totale è di 24 centesimi. Trovare il numero di monete di ciascun tipo. Più precisamente:

(4a). Trovare il sistema lineare associato al problema;

(4b). Risolvere il sistema.

1. Risolvo il sistema $\begin{cases} x + 5y + 10z & = 24 \\ x + y + z & = 7 \\ -y + 2z & = 0 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x & = 4 \\ y & = 2 \\ z & = 1 \end{cases}$