Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

penalità	totale

8 Giugno 2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.[8pt.]
(1a). Determinare l'insieme S di tutte le soluzioni complesse del sistema di equazioni

$$\begin{cases} (z+i)^3 & = \overline{z} - i \\ \overline{z}^5 + 4\overline{z} & = 0 \end{cases}.$$

(1b). Determinare l'insieme $T = \{(z_1, z_2) \in S^2 : \ z_1 \neq z_2 \text{ e } z_1 - z_2 \in \mathbb{R}\}$.
(1c). Determinare l'insieme $Z = \{z \in S : \text{ per ogni } z' \in S \text{ tale che } z \neq z', \text{ si ha } z \cdot z' \in \mathbb{R}\}$.

Soluzione.

(1a). Risolviamo la seconda equazione.

Osserviamo che 0 è soluzione del sistema, quindi supponiamo che $z \neq 0$. La seconda equazione diventa:

$$\overline{z}^4 = -4.$$

Passiamo in coordinate polari: $z = \rho e^{i\theta}$. L'equazione diventa $\rho^4 e^{-4i\theta} = 4e^{\pi}$. Dunque $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = -\frac{\pi}{4} - k\frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$.

Le soluzioni della seconda equazione sono dunque $0, \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. In coordinate cartesiane, ricordandosi che $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, otteniamo le cinque soluzioni

$$0, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i.$$

Sostituiamo nella prima equazione e troviamo che solo tre di queste soluzioni sono anche soluzione della prima equazione.

In conclusione, $S = \{0, 1-i, -1-i\}$.
(1b). $T = \{(1-i, -1-i), (-1-i, 1-i)\}$
(1c). Poiché tutte le combinazioni di prodotti di elementi distinti di S appartengono a $\mathbb{R}$, abbiamo $Z = S$.

Esercizio 2. [12pt.] Si considerino le relazioni

$$T(1,1,1) = (-1,2)\,,\ T(0,1,1) = (0,4)\,,\ T(1,1,0) = (2,1)\,.$$

(2a). Verificare che queste relazioni definiscono un'unica applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (giustificare la risposta!).

(2b). Si determini la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

(2c). Si determini la dimensione e una base dell'immagine di T. Dire se T è surgettiva.

(2d). Si determini la dimensione e una base del nucelo di T. Dire se T è iniettiva.

Soluzione.

(2a). Basta verificare che i vettori $v_1 = (1,1,1)\,,\ v_2 = (0,1,1)\,,\ v_3 = (1,1,0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$. Il determinante della matrice che ha questi vettori per colonne è diverso da zero, dunque si tratta di una base.

(2b). Le colonne di A sono date dai vettori $T(e_1)\,, T(e_2)\,, T(e_3)$.

Osserviamo che $e_1 = v_1 - v_2,\ e_3 = v_1 - v_3,\ e_2 = v_2 - e_3 = v_2 - v_1 + v_3$.

Dunque per linearità $T(e_1) = (-1,2) - (0,4) = (-1,-2)$. Analogamente, $T(e_3) = (-3,1)$ e $T(e_2) = (3,3)$.

Dunque $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(2c). La forma ridotta di Gauss è la seguente $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

Dunque l'immagine ha dimensione 2 e T è surgettiva. Una base dell'immagine è data dalle prime due colonne di A.

(2d). Essendo un'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^2$ non può essere iniettiva! Il nucleo ha dimensione 1 e una base si trova trovando una soluzione speciale $\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. **[14pt.]** Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

(3a). Determinare gli autovalori di B_k e la loro molteplicità algebrica.

(3b). Determinare l'insieme $E = \{k \in \mathbb{R} : \ B_k \text{ è diagonalizzabile}\}$.

(3c). Per $k \in E$, trovare la forma diagonale di B_k e una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di B_k.

Soluzione.

(3a). Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_{B_k}(\lambda) = \det(B_k - \lambda I)$, sviluppando rispetto alla prima colonna.

$p_{B_k}(\lambda) = (3-k-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-k-\lambda) - k\right] + k(3-k-\lambda) = (3-k-\lambda)^2(2-\lambda)$.

Dunque gli autovalori sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 3-k$.

Se $k = 1$ allora 2 è l'unico autovalore e ha molteplicità algerbrica 3.

Se $k \neq 1$ allora $3-k \neq 2$ e gli autovalori sono 2 (con molteplicità algebrica 1) e $3-k$ (con molteplicità algebrica 2).

(3b). Calcoliamo la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore $3-k$.

La forma ridotta di Gauss della matrice $B_k - (3-k)I$ è

$$\begin{pmatrix} k & -1+k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 0$ allora la matrice ha rango 2 e dunque l'autospazio in questione ha dimensione 1. Dunque B_k non è diagonalizzabile per $k \neq 0$.

Se invece $k = 0$ allora l'autospazio in questione ha dimensione 2 e dunque B_0 è diagonalizzabile. Quindi $E = \{0\}$.

(3c). La forma diagonale di B_0 è

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Troviamo una base di autovettori con il metodo delle soluzioni speciali.

Il vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ genera l'autospazio relativo all'autovalore 2.

I vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generano l'autospazio relativo all'autovalore 3.