Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

penalità	totale

2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1.[8pt.]
(1a). Determinare l'insieme S di tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$e^{2z} - e^{\overline{z}+3} = 0.$$

(1b). Dato l'insieme $T = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 3\}$, determinare l'insieme $S \cap T$.
(1c). Determinare l'insieme $Z = \{z \in S : \ \overline{z} \in S\}$.
(1d). Determinare infine l'insieme $(S \cap T) \cup Z$.

Soluzione.

(1a). Cerchiamo i numero complessi $z = a + ib$ tali che $e^{2z-\overline{z}-3} = 1$, ovvero

$$2a + 2bi - a + ib - 3 = 2k\pi i.$$

Dunque $\begin{cases} a - 3 = 0 \\ 3b = 2k\pi \end{cases}$. Ne segue che $S = \left\{3 + \frac{2}{3}k\pi i : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
(1b). Calcolando la norma delle soluzioni si vede subito che l'unica soluzione con norma ≤ 3 è $z = 3$. Quindi $S \cap T = \{3\}$.
(1c). Dal sistema di equazioni qui sopra si vede che se $z \in S$ allora $\overline{z} \in S$. Dunque $Z = S$.
(1d). Ne segue che $(S \cap T) \cup Z = S$.

Esercizio 2. [10pt.] Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

la matrice associata a un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(2a). Trovare la matrice B associata a T rispetto alla base canonica.
(2b). Determinare il vettore $v = T(1, 0, -5)$.
(2c). T è iniettiva?

Soluzione

(2a). Sia C la matrice che ha come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$. Sappiamo che $A = C^{-1}BC$. Dunque $B = CAC^{-1}$.

Calcoliamo C^{-1} col il metodo di Gauss-Jordan e troviamo

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dunque $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 10 & -8 & 2 \\ 35 & -31 & 7 \end{pmatrix}$.

(2b). $T(1, 0, -5) = B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2c). Alla luce del punto precedente, T non è iniettiva.

Esercizio 3. **[16pt.]** Si considerino le matrici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e } B_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

(3a). Calcolare i polinomi caratteristici e le dimensioni degli autospazi della matrice E e della matrice B_k (al variare di k).

(3b). Sia T l'applicazione lineare che ha E come matrice associata rispetto alla base canonica. Trovare il valore $k_0 \in \mathbb{R}$ tale che B_{k_0} sia la matrice associata a T rispetto a una qualche base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(3c). Calcolare gli autovettori di E e di B_{k_0}.

(3d). Usare (3c) per trovare la base $\mathcal{C}$.

Soluzione

(3a). Visto che le matrici sono entrambe triangolari, i polinomi caratteristici si calcolano facilmente guardando la diagonale:

$p_E(\lambda) = p_{B_k}(\lambda) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$.

In entrambi i casi, la dimenzione dell'autospazio relativo all'autovalore 3 è necessariamente 1. Resta da vedere la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore 1.

$E - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, dunque in questo caso l'autospazio ha dimensione 2 (e quindi E è diagonalizzabile).

$B_k - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 5 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$, dunque abbiamo due casi: se $k \neq 1$ allora l'autospazio ha dimensione 1 (e quindi B_k non è diagonalizzabile); se $k = 1$ allora l'autospazio ha dimensione 2 e B_1 è diagonalizzabile (ed ha la stessa forma diagonale di E).

(3b). Poiché E è diagonalizzabile, E e B_k sono associate allo stesso endomorfismo T se e solo se B_k è diagonalizzabile, dunque $k_0 = 1$.

Infatti, sia D la forma diagonale di E e sia F la matrice che ha come colonne gli autovalori di E. Sappiamo che $E = FDF^{-1}$.

Se B_k e E sono associate allo stesso endomorfismo, allora esiste una matrice invertibile G tale che $B_k = G^{-1}EG = G^{-1}FDF^{-1}G$. Dunque B_k è diagonalizzabile e la sua forma diagonale è D (le colonne della matrice $F^{-1}G$ sono gli autovettori di B_k).

Viceversa, se B_k è diagonalizzabile e la sua forma diagonale è D, vuol dire che, indicando con H la matrice che ha per colonne gli autovettori di B_k, si ha $B_k = HDH^{-1}$.

Ne segue che $B_k = HF^{-1}EFH^{-1}$, dunque B_k e E sono *simili* (sono associate alla stessa applicazione lineare) e la matrice FH^{-1} è la matrice di cambiamento di base.

(3c). Gli autovettori si calcolano facilmente con il metodo delle soluzioni speciali.

Gli autovettori di E sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (rispetto all'autovalore 1) e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (rispetto all'autovalore 3).

Gli autovettori di B_1 sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (rispetto all'autovalore 1) e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (rispetto all'autovalore 3).

(3d). I vettori della base $\mathcal{C}$ sono le colonne della matrice di cambiamento di base che permette di passare da E a B_1. Usando i punti precedenti abbiamo che:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo con il metodo di Gauss-Jordan $H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ne segue che le colonne della seguente matrice sono i vettori della base $\mathcal{C}$ cercata:

$$FH^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$