Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

28 Gennaio 2016 - A

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	Vera	Falsa
1) Il numero complesso $i^3 + i + 1$ è uguale a 1.	☒	☐
2) Tutti i sistemi lineari omogenei con n equazioni e k incognite dove $n > k$ hanno soluzione.	☒	☐
3) Se A è una matrice antisimmetrica allora anche A^T è antisimmetrica.	☒	☐
4) Se w è perpendicolare sia a v_1 che a $v_1 + v_2$ allora è perpendicolare anche a v_2.	☒	☐
5) Se la matrice A è triangolare superiore allora A ha tutti gli autovalori reali.	☒	☐
6) Il vettore $(-4, 6)$ ha coordinate $(2, -1)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1, 3), (2, 1)\}$.	☐	☒
7) Ogni funzione $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ è invertibile a destra.	☐	☒
8) Se la matrice A è tale che $A^2 = 0$ allora $A = 0$.	☐	☒

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

Esercizio 2. | PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0; risposta esatta = +2.5;** |

1) Dati i numeri complessi $z = 3\pi - i$ e $w = i - 2$, calcolare e scrivere sia in *forma cartesiana* che in *forma polare* il seguente numero:

$$\frac{e^{z^2-9\pi^2}}{i-2\overline{w}}$$

RISPOSTA:

$$\frac{1}{25e}(+4-3i)$$

$$\rho = \frac{1}{5e} \qquad \theta = -\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$$

2) Sia data la matrice $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare la sua inversa destra C che ha tutti zero nella seconda riga.

RISPOSTA:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare la matrice inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

4) Calcolare il determinante $\det(B)$ della seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$\det B = -56$$

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

28 Gennaio 2016 - B

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se il prodotto di due matrici $AB = 0$ allora $A = 0$ o $B = 0$.	☐	☒
2) Nessun sistema lineare omogeneo con n equazioni e k incognite dove $n < k$ ha soluzione.	☐	☒
3) Ogni funzione $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ è invertibile a sinistra.	☐	☒
4) Il vettore $(6, -5)$ ha coordinate $(-2, 1)$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{(-1, 3), (2, 1)\}$.	☐	☒
5) Se A è una matrice simmetrica allora anche A^T è simmetrica.	☒	☐
6) Il numero complesso $i^4 + i + 1$ è uguale a i.	☐	☒
7) Se w è perpendicolare sia a $v_1 + v_2$ che a $v_1 - v_2$ allora è perpendicolare sia a v_1 che a v_2.	☒	☐
8) Se la matrice A è diagonale allora A ha tutti gli autovalori reali.	☒	☐

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

Esercizio 2. | PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0;** **risposta esatta = +2.5;**

1) Dati i numeri complessi $z = 3 + 2\pi i$ e $w = 2 - i$, calcolare e scrivere sia in forma cartesiana che in forma polare il seguente numero:

$$\frac{e^{4\pi^2 + z^2}}{3\overline{w} - 2}$$

RISPOSTA:

$$\frac{e^9}{25}(4 - 3i)$$

$$\rho = \frac{e^9}{5} \qquad \theta = -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$$

2) Sia data la matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Trovare la sua inversa sinistra C che ha tutti zero nella seconda colonna.

RISPOSTA:

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare la matrice inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4) Calcolare il determinante $\det(B)$ della seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$\det B = 18$$

Esercizio 1

COMPITO del 28/1/2016

(a) $z = -i \cdot \bar{z}^2$

In coordinate polari, $z = (\rho, \theta) \Rightarrow \bar{z} = (\rho, -\theta)$

$\Rightarrow \bar{z}^2 = (\rho^2, -2\theta)$. Inoltre $-i = (1, -\pi/2) \Rightarrow$

$-i \cdot \bar{z}^2 = (\rho^2, -2\theta - \pi/2)$ Quindi

$z = -i \cdot \bar{z}^2 \Leftrightarrow (\rho, \theta) = (\rho^2, -2\theta - \pi/2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \rho = \rho^2 \\ \theta = -2\theta - \pi/2 + 2k\pi \end{cases}$$

$\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho = 0$ o $\rho = 1$

$3\theta = -\pi/2 + 2k\pi \Leftrightarrow$

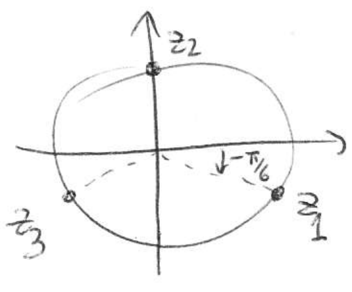
$\theta = -\pi/6 + k \cdot 2\pi/3 =$

$-\pi/6, \; -\pi/6 + 2\pi/3, \; -\pi/6 + 4\pi/3$

$= -\pi/6, \; \pi/2, \; \frac{7}{6}\pi$ (poi si ripetono)

Oltre alla soluzione $z_0 = 0$ corrispondente a $\rho = 0$,

si hanno le seguenti tre soluzioni sul cerchio unitario $\rho = 1$ del piano complesso



Dunque le soluzioni sono:

$z_0 = 0$; $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$;

$z_2 = i$; $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}$

(b) $e^{3z+1} - e^{\bar{z}} = 0 \iff$

$$e^{3z+1} = e^{\bar{z}}$$

Sia $z = a + ib$.

Allora $e^{3z+1} = e^{(3a+1)+3bi}$ e

$$e^{\bar{z}} = e^{a+i(-b)}$$

Ricordiamo che per ogni numero complesso $w \in \mathbb{C}$ si ha che $e^{w} = (e^{\mathrm{Re}\, w}, \mathrm{Im}(w))$, cioe' se $w = c + id$, allora $e^{w} = e^{c}(\cos d + i \sin d)$ ha come modulo e^{c} e come argomento d.

Dunque, in coordinate polari,

$$e^{3z+1} = (e^{3a+1}, 3b) \quad e \quad e^{\bar{z}} = (e^{a}, -b)$$

Quindi $e^{3z+1} = e^{\bar{z}} \iff \begin{cases} e^{3a+1} = e^{a} \\ 3b = -b + 2k\pi \end{cases}$

da cui $\begin{cases} 3a+1 = a \iff a = -1/2 \\ 4b = 2k\pi \iff b = k\pi/2 \end{cases}$ Quindi

$S_2 = \left\{ -\frac{1}{2} + \left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) i \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ e' l'insieme (infinito) delle soluzioni.

Esercizio 2

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_1+3x_2+2x_4-x_5,\ x_3+4x_4-3x_5,\ x_1+3x_2+x_3+6x_4-4x_5)$$

Matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) & (b) Riduzioni di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III rige} - \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & l & p & l & l \end{matrix} \end{array}$$

Le variabili pivot sono x_1 e x_3, dunque la dimensione dell'$Im(T)$ e' 2 ed una sua base e' data dai vettori nelle I e III colonna della matrice iniziale A, cioe' $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Per trovare una base del nucleo, troviamo le 3 soluzioni speciali corrispondenti alle 3 variabili libere x_2, x_4, x_5

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_4-x_5 = 0 \\ x_3+4x_4-3x_5 = 0 \end{cases}$$

1. $x_2=1$, $x_4=0$, $x_5=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-3$, $x_3=0$ $\quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $x_2=0$, $x_4=1$, $x_5=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-2$, $x_3=-4$ $\quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $x_2=0$, $x_4=0$, $x_5=1$ $\Rightarrow$ $x_1=1$, $x_3=3$ $\quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dunque il nucleo ha come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ed ha quindi dimensione 3.

(c) Troviamo una soluzione particolare al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 4x_5 = 3 \end{cases}$$

Riduzioni di Gauss: (le stesse di sopra con in più la colonna dei coefficienti)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III riga} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} - \text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

Poniamo le variabili libere $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ ed otteniamo

$$\underset{\substack{\text{soluzione} \\ \text{particolare}}}{\vec{s}_p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme cercato è $S = \{ \vec{s}_p + \vec{v} \mid \vec{v} \in \ker T \} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{generico vettore di } \ker T} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 3

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_3,\ x_1 + 2x_2 + x_3,\ 2x_3,\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4)$$

a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

(Sviluppo secondo l'ultima colonna)

$$= (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

(Sviluppo secondo l'ultima riga)

$$(1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2(3-\lambda)$$

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2(3-\lambda)$

Autovalori:

$\lambda = 1$ MOLT. ALGEBRICA 1

$\lambda = 2$ MOLT. ALGEBRICA 2

$\lambda = 3$ MOLT. ALGEBRICA 1

In generale:

c) $\mathrm{Aut}(A, \lambda) = \ker(A - \lambda \cdot I)$.

$\underline{\lambda = 1}$

$$A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Per comodità, scambio prima e seconda riga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV riga} + 1 \cdot \text{I}]{\text{II riga} - 2 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{IV riga} + \frac{3}{2} \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV riga} - \frac{5}{2} \text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

1 variabile libera, cioè x_4

Soluzione speciale con $x_4 = 1$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$-2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$
$$x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$B = \{\vec{v}_1\}$ è

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base dell'autospazio $Aut(A, 1) = ker(A - 1 \cdot I)$

autovettore di autovalore 1

AUTOVALORE $\lambda = 1$ HA MOLTEPL. GEOMETRICA 1

$\lambda = 2$

$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV riga} + \text{I}]{\text{II riga} - \text{I}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Scambio II e IV riga}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P & P & L & L \end{array}$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Variabili libere: x_3 e x_4

Soluzioni speciali:

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ 2x_2 + 4 \cdot 1 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_2 + 4 \cdot 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ sono autovettori linearmente indip. nell'autospazio $Aut(A, 2) = \ker(A - 2I)$

$B = \{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è base dell'autospazio $Aut(A, 2)$

L'AUTOVALORE $\lambda = 2$ HA MOLTEPLICITA' GEOM. 2

$\lambda = 3$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e II riga}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV riga} + \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

scambio II e IV riga $\longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{\text{IV riga} + \text{I}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_4 variabile libera

p p p l

Soluzione speciale $x_4 = 1$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 + 4x_3 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ -x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soluzione speciale

$\mathcal{B} = \{\vec{v}_4\}$ e' base dell' autospazio $\mathrm{Aut}(A, 3) = \ker(A - 3I)$

MOLTEPLICITA' GEOMETRICA DELL'AUTOVALORE $\lambda = 3$ e' 1

La matrice è diagonalizzabile perche' ha tutti gli autovalori reali, e le loro molt. algebriche coincidono con le molteplicità geometriche.

(d)

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di autovettori. Dunque la matrice cambio di base

$$S = \left[v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è t.c. $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

matrice diagonale avente gli autovalori ripetuti con la loro molteplicità sulla diagonale.

Esercizio 4

$$W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z) \mid x+6y-2z=0 \ \& \ 3x+8y+4z=0\}.$$

Dunque $W_1 \cap W_2$ e' l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x+6y-2z=0 \\ 3x+8y+4z=0 \end{cases}$$

(a) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ e' la matrice associata al sistema, allora $W_1 \cap W_2 = \ker A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II riga} - 3\cdot \text{I}} \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} p & p & l \end{array} \end{array}$$

z e' l'unica variabile libera. Dimensione $\ker A = 1$.

Soluzione speciale con $z=1$:

$$\begin{cases} x+6y-2z=0 \Rightarrow x+6-2=0 \Rightarrow x=-4 \\ -10y+10z=0 \Rightarrow -10y+10=0 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{soluzione speciale.}$$

Dunque $W_1 \cap W_2 = \ker A$ ha come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(b) Ad esempio, ponendo

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

determiniamo una applicazione lineare $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

È immediato verificare che

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Col}(B) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \ker A = W$$