fila A

Ingegneria Edile-Architettura

SOLUZIONI

Test di Geometria

8 Settembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se A è una matrice diagonalizzabile allora A è invertibile.	☐	☒
2) Esistono infinite soluzioni dell'equazione complessa $e^z = 1$.	☒	☐
3) Per ogni matrice quadrata A, la matrice $B = (A \cdot A^T)$ è simmetrica.	☒	☐
4) Il prodotto scalare $(3v \mid 3w)$ è 9 volte il prodotto scalare $(v \mid w)$.	☒	☐
5) Se $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 < k^2 < 40\}$ e $B = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{Z}\, \text{t.c.}\, k = 3m + 2\}$ allora $\lvert A \cap B \rvert = 1$.	☐	☒
6) Ogni matrice diagonalizzabile A di dimensione 3x3 ha tre autovalori reali distinti.	☐	☒
7) I vettori $(2, -3, 1)$ e $(7, 4, 1)$ formano un angolo ottuso.	☐	☒
8) Lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche 2x2 ha dimensione 3.	☒	☐

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0; risposta esatta = +2.5;**

1b) Trovare una base del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 7y - 5z = 0\}.$$

RISPOSTA:

$$\left\{ \left(\frac{5}{3}, 0, 1\right), \left(0, \frac{5}{7}, 1\right) \right\}$$

$\hookrightarrow$ oppure $\left(-\frac{7}{3}, 1, 0\right)$

2b) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa B^{-1} della seguente matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Determinare la matrice $B = A^T \cdot A$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Dati i numeri complessi $z = 1 + i$ e $w = 2 - 2i$, calcolare e scrivere sia in *forma cartesiana* che in *forma polare* il seguente numero:

$$\frac{z^{201}}{w^{100}}.$$

RISPOSTA:

cartesiana : $-2^{-50} - i\, 2^{-50}$ polare : $\left(\sqrt{2}^{\,-99}, \frac{5}{4}\pi\right)$

fila B

Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

SOLUZIONI

8 Settembre 2016

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

PRIMA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se $X = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } k = 3m-1\}$ e $Y = \{k \in \mathbb{Z} \mid 0 < k^2 < 30\}$ allora $\lvert X \cap Y \rvert = 2$.	☒	☐
2) I vettori $(1,-3,2)$ e $(-1,4,7)$ formano un angolo ottuso.	☐	☒
3) Lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 ha dimensione 3.	☒	☐
4) Per ogni matrice quadrata A, la matrice $B = (A + A^T)$ è simmetrica.	☒	☐
5) Il prodotto scalare $(3v \mid 3w)$ è 6 volte il prodotto scalare $(v \mid w)$.	☐	☒
6) Se A è una matrice invertibile allora A è diagonalizzabile.	☐	☒
7) Ogni matrice A di dimensione 3x3 con tre autovalori reali distinti è diagonalizzabile.	☒	☐
8) Non esistono soluzioni dell'equazione complessa $e^z = 0$.	☒	☐

ATTENZIONE: La seconda parte del test è sul retro di questo foglio.

SECONDA PARTE

PUNTEGGIO : **risposta mancante o errata = 0;**	**risposta esatta = +2.5;**

1) Trovare una base del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y - 7z = 0\}.$$

RISPOSTA:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\tfrac{5}{2}, 1, 0\right), \left(\tfrac{7}{2}, 0, 1\right) \right\}$$

2) Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Determinare la matrice $A = B \cdot B^T$ dove

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Dati i numeri complessi $z = 2 + 2i$ e $w = 1 - i$, calcolare e scrivere sia in *forma polare* che in *forma cartesiana* il seguente numero:

$$\frac{z^{101}}{w^{200}}.$$

RISPOSTA:

cartesiana : $-2^{51} - i\,2^{51}$

polare : $\left(\sqrt{2}^{\,103}, \frac{5}{4}\pi\right)$

$\parallel$

$2^{51} \cdot \sqrt{2}$

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

09 Gennaio 2015 – tempo a disposizione : 120 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse della seguente equazione, e scriverle sia in forma polare che in forma cartesiana:

$$z^5 - 16\,\overline{z} = 0.$$

In coordinate polari, se $z = (\rho, \theta)$ allora
$z^5 = (\rho^5, 5\theta)$, $\overline{z} = (\rho, -\theta)$ e $+16\,\overline{z} = (16\rho, -\theta)$.
Da $z^5 = 16\,\overline{z}$ si ottiene $\begin{cases} \rho^5 = 16\rho \\ 5\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{matrix} \rho = 0, 2 \\ \theta = k\,\pi/3 \end{matrix}$

Le soluzioni sono $z_0 = 0$, $z_1 = (2, 0)$, $z_2 = (2, \pi/3)$,
$z_3 = (2, \frac{2}{3}\pi)$, $z_4 = (2, \pi)$, $z_5 = (2, \frac{4}{3}\pi)$, $z_6 = (2, \frac{5}{3}\pi)$

In coordinate cartesiane:

$z_0 = 0$

$z_1 = 2$

$z_2 = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = 1 + \sqrt{3}\, i$

$z_3 = 2(\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = -1 + \sqrt{3}\, i$

$z_4 = -2$

$z_5 = 2(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) = -1 - \sqrt{3}\, i$

$z_6 = 2(\cos 5\pi/3 + i \sin 5\pi/3) = 1 - \sqrt{3}\, i$

Esercizio 2. [9 pt.]
Al variare del parametro k, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T_k(x, y, z) = (kx, -x + y + 3z, x + 2y - 2z)$$

1. Determinare la matrice A_k associata a T_k.
2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare T_k è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
3. Determinare una base per l'immagine e una base per il nucleo di T_k quando $k = 0$ e quando $k = 1$.

1. $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\det A_k =$ (sviluppando lungo la I riga)

$= k \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = k(-2-6) = -8k = 0 \iff k=0.$

Dunque se $k \neq 0$, T_k e' invertibile, cioe' biunivoca. Se invece $k=0$, T_k NON e' invertibile.

Visto che A_k e' una matrice quadrata, per $k=0$

NON INVERTIBILE $\iff$ NON INIETTIVA $\iff$ NON SURIETTIVA

3. Se $k=1$, T_k e' invertibile, dunque $\ker T_k = \{0\}$ e $\mathrm{Im}\, T_k = \mathbb{R}^3$ (quindi banalmente $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ e' base di $\mathrm{Im}\, T_k$.

Per $k=0$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e III riga}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P P L

Le prime due colonne sono pivot, quindi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$ e' una base di $\operatorname{Im} T_0$.

L'unica colonna libera e' la III, quindi per trovare la soluzione speciale poniamo $z = 1$ nel sistema ridotto

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x - \frac{2}{3} - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 8/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ e' una base di $\ker T_0$.

Esercizio 3. [11 pt.]
Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 \\ k+2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & k \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori di A_k e la loro molteplicità algebrica.
2. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è diagonalizzabile.
3. Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k non è invertibile.
4. Quando $k = 0$, trovare una matrice invertibile S tale che $S^{-1}A_kS$ è una matrice diagonale.

(1)

Il polinomio caratteristico e' il determinante di

$$A_k - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & k & 0 \\ k+2 & 2-\lambda & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & -3 & k-\lambda \end{pmatrix}.$$

Sviluppando secondo la IV colonna, si trova:

$$\det(A_k - \lambda I) = (k-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & k \\ k+2 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix}\text{sviluppando} \\ \text{secondo la III riga}\end{pmatrix} = (k-\lambda) \cdot (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ k+2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (k-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = P_A(\lambda)$ POLINOMIO CARATTERISTICO

Dunque gli autovalori sono $\lambda = k$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 2$

- Se $k \neq 1, -1, 2$ allora

  $\lambda = k$ ha moltepl. alg. 1

  $\lambda = 1$ ha " alg. 1

  $\lambda = -1$ ha " alg. 1

  $\lambda = 2$ ha " alg. 1

- Se $k = 1$, allora

  $\lambda = 1$ m.a. 2

  $\lambda = -1$ m.a. 1

  $\lambda = 2$ m.a. 1

- Se $k = -1$ allora

  $\lambda = 1$ m.a. 1

  $\lambda = -1$ m.a. 2

  $\lambda = 2$ m.a. 1

- Se $k = 2$ allora

  $\lambda = 1$ m.a. 1

  $\lambda = -1$ m.a. 1

  $\lambda = 2$ m.a. 2

(2) Quando $k \neq 1, -1, 2$ si hanno 4 autovalori distinti, e dunque A_k e' diagonalizzabile. Vediamo ora gli altri casi ad uno ad uno.

$\underline{k=1}$. Dobbiamo controllare la molt. geom. di $\lambda = 1$.

$$\ker(A_1 - 1\cdot I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambio le righe e riduco:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-3\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\frac{7}{4}\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -23/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C'è 1 colonna libera, dunque $\dim(A_1 - 1\cdot I) = 1$, cioè m.g. $= 1$ mentre la molteplicità algebrica di $\lambda = 1$ è 2. Dunque in questo caso A_k $\underline{\underline{\text{NON}}}$ è diagonalizzabile.

$\underline{k=-1}$ Dobbiamo calcolare la m.g. di $\lambda = -1$

$$\ker(A_{-1} + 1\cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambio le righe e riduco:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+2\text{III}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 colonna libera $\Rightarrow$ m.a. $= 1$ mentre m.g. $= 2 \Rightarrow$ $\underline{\text{NON}}$ diagonalizz.

$\underline{k=2}$ Dobbiamo controllare la molt. geom. di $\lambda=2$

$$\ker(A_2 - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Scambio le righe e riduco:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-4\text{I}]{\text{II}+3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\frac{4}{3}\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-3\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 colonna libera $\Rightarrow$ m.g. $=1$ mentre m.a. $=2$ $\Rightarrow$ $\underline{\text{NON}}$ diagonalizzabile.

Dunque, riassumendo, A_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1, -1, 2$.

③ La matrice quadrata A_k $\underline{\text{non}}$ è invertibile $\Longleftrightarrow \ker(A_k) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \lambda = 0$ è AUTOVALORE

Dunque A_k non è invertibile $\Longleftrightarrow k = 0$

Alternativamente, calcoliamo

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & k & 0 \\ k+2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & k \end{pmatrix} =$$

(sviluppo secondo la IV riga) $k \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ k+2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

(sviluppo secondo la III riga) $k \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k+2 & 2 \end{pmatrix} =$

$= k \cdot 1 \cdot (-2) = -2k$

A_k non e' invertibile $\iff \det A_k = -2k = 0 \iff$
$k = 0$.

(4) Quando $k=0$ abbiamo visto che la matrice e' diagonalizzabile, cioe' ha una base di autovettori v_1, v_2, v_3, v_4

Se $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \right)$ e' la matrice cambio di base, allora $S^{-1} A_0 S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ e' diagonale.

Dobbiamo trovare gli autovettori nel caso $k=0$

Autovalori $\lambda=0$, $\lambda=1$, $\lambda=-1$, $\lambda=2$.

$\lambda=0$

$$\ker(A_0-0\cdot I)=\ker\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\2&2&-3&0\\0&0&1&0\\1&-2&-3&0\end{pmatrix},$$

E' immediato verificare che $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\in\ker A_0$

e quindi e' un autovettore di autovalore $\lambda=0$.

$\lambda=1$ $\quad\ker(A_0-1\cdot I)=\ker\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\2&1&-3&0\\0&0&0&0\\1&-2&-3&-1\end{pmatrix}$

Scambio righe e riduco:

$$\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\2&1&-3&0\\1&-2&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{III}+\frac12\text{I}]{\text{II}+\text{I}}\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&1&-3&0\\0&-2&-3&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{III}+2\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&-9&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

La IV colonna e' libera.
Poniamo la variabile libera $x_4=1$
e troviamo la soluzione speciale
risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}-2x_1=0\\x_2-3x_3=0\\-9x_3-x_4=0\end{cases}\Rightarrow -9x_3=1\Rightarrow x_3=-\tfrac19$$

& $x_2=3x_3\Rightarrow x_2=-\frac13$

& $x_1=0$

Dunque $v_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac13\\-\frac19\\1\end{pmatrix}$ e' l'autovettore di autovalore 1.

$\boxed{\lambda = -1}$

$$\ker(A_0 + 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambio righe e riduco:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La colonna libera è la IV. Troviamo la soluzione speciale considerando il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$$ e ponendo $x_4 = 1$

$x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $7x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2/7$

$x_1 - 4/7 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -3/7$

$$V_3 = \begin{pmatrix} -3/7 \\ 2/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ è autovettore di autovalore $\lambda = -1$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$\ker(A_0 - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Visto che la I e la III colonne sono uguali

è immediato verificare che $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} \in \ker(A_0 - 2I)$

e dunque $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 2$

Concludiamo che se

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3/7 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/7 & -1 \\ 0 & -1/9 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & +1 \end{pmatrix}$$ è

la matrice cambio di base, si ha

$$S^{-1} A_0 S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. [6pt.]
Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che soddisfa le seguenti due proprietà:

1. $\operatorname{Imm}(f) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$,
2. f è diagonalizzabile ed ha come autovalori $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$,

e determinarne la matrice A rispetto alla base canonica.

METODO 1 Si considera una base che contiene i vettori $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, ad esempio

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}; \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

allora $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

e $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 1$; $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 2$; e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 0$.

Quindi f ha le proprietà richieste

(ricordare che un'applicazione lineare è determinata dai valori che assume su una base)

La matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $\cancel{A}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Se A è la matrice associata ad f rispetto alla base canonica, allora

$$S^{-1} A S = B$$

dove $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice cambio di base,

dunque $A = S B S^{-1} = \underset{\text{i calcoli}}{(\text{omettiamo})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Si può verificare con un semplice calcolo che A ha le proprietà richieste.

METODO 2

Prendiamo una matrice della forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$.

$Col(A) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \iff$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \iff \exists \mu_1, \mu_2$ t.c.

$$\mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$ da cui

$$\begin{cases} \mu_1 = a \\ \mu_1 + \mu_2 = b \\ \mu_2 = c \end{cases} \Rightarrow a + c = b$$

Alternativamente, $Col(A) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ se e solo se la III colonna di A è colonna libera.

Dunque riduciamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c-b+a \end{pmatrix}$$

la III colonna è libera $\iff c-b+a=0 \iff b=a+c$

Dobbiamo imporre che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & a+c \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$

abbia autovalori $\lambda = 0, 1, 2$.

Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 1 & 1-\lambda & a+c \\ 0 & 1 & c-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo secondo la I riga)}$$

$$(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a+c \\ 1 & c-\lambda \end{pmatrix} \cancel{+0} + a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(c-\lambda) - (a+c)\right] + a \cdot 1$$

Non è necessario semplificare l'espressione svolgendo i calcoli. Ci serve solo sapere che $\lambda = 0, 1, 2$ sono soluzioni, cioè autovalori:

$$P_A(0) = 1 \cdot \left[1 \cdot c - (a+c)\right] + a = \cancel{c} - \cancel{a} - \cancel{c} + \cancel{a} = 0$$ OK

$$P_A(1) = 0 \cdot [\ \dots\ ] + a \cdot 1 = 0 \iff a = 0$$

$$P_A(2) = (-1) \cdot \left[(-1) \cdot (c-2) - (a+c)\right] + a = c-2+a+c+a = 0$$

$$\iff \quad 2a + 2c - 2 = 0 \iff c = 1 - a$$

e quindi, visto che $a = 0$, $c = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ ha le proprietà richieste,

come si può verificare con qualche semplice calcolo.