Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Tempo a disposizione: 120 minuti.
Buon lavoro!

3 Giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.
Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$4z^2 - \overline{z} = 0$$

Esercizio 2. [10 pt.]
Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 - x_3, -2x_1 - kx_2, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Determinare la matrice associata a f_k.
2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_k è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_k(x, y, z) = (-3, -4, 1)\}.$$

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_1 - 4x_2, 6x_1 - 5x_2, x_3, 18x_1 - 12x_2 + 10x_3 - x_4)$$

1. Verificare che il vettore $(1, 1, 0, 3)$ è un autovettore e determinarne l'autovalore.
2. Determinare la matrice A associata a f, il suo polinomio caratteristico e i suoi autovalori.
3. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

   - Il vettore $v_1 = (1, 1, 0)$ è un autovettore con autovalore 1,
   - Il vettore $v_2 = (0, 1, 1)$ è un autovettore con autovalore -1,
   - T non è biunivoca,

   e scrivere la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

2. Sia V il sottospazio $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Trovare una base del sottospazio perpendicolare

$$V^\perp = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \perp \vec{y} \text{ per ogni } \vec{x} \in V\}.$$