Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 30 minuti

3 Giugno 2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se $z = 3 - i$ allora $\frac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}} = -3i$.	☐	☑
2) Se una matrice 3×3 ha due colonne uguali, allora il suo nucleo ha dimensione ≥ 2.	☐	☑
3) Per tutte le matrici quadrate A e B vale la formula $(A + B^T)^T = A^T + B$.	☑	☐
4) Ogni applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è biunivoca.	☑	☐
5) Se λ è autovalore della matrice quadrata A allora 2λ è autovalore della matrice $A \cdot A$.	☐	☑
6) Se $z = -\frac{\pi}{2}i$ allora $e^z = i$.	☐	☑
7) I vettori $v_1 = (-1, 1, -1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ e $v_3 = (1, -1, 0)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.	☑	☐
8) Se $X = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{N} \cap [1, 4]\}$ e $Y = \{n^2 + 4 \mid n \in \mathbb{N} \cap [1, 3]\}$ allora $\lvert X \cap Y \rvert = 1$.	☐	☑
9) Il sottospazio delle soluzioni $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ di un sistema lineare omogeneo in n equazioni ed m incognite ha dimensione n.	☐	☑
10) Se $A = S^{-1}BS$ è simile a B allora A e B hanno gli stessi autovalori.	☑	☐

Esercizio. [**4 punti**] Applicando il metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa A^{-1} della seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Riduzioni e metodo di Gauss-Jordan per l'inversione delle matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to B^{-1}$$

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Tempo a disposizione: 120 minuti.
Buon lavoro!

3 Giugno 2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.
Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$4z^2 - \overline{z} = 0$$

Se $z = (\rho, \theta)$ in coordinate polari, allora
$4z^2 = (4\rho^2, 2\theta)$ e $\overline{z} = (\rho, -\theta)$.
Visto che $4z^2 = \overline{z}$, si ha che

$$\begin{cases} 4\rho^2 = \rho \\ 2\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \rho = 0 \text{ o } \rho = 1/4 \\ 3\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} = 0, 2\pi/3, 4/3\pi, \dots \end{array}$$

Le soluzioni sono:

$z_0 = 0$ (quando $\rho = 0$)

$z_1 = 1/4 (\cos 0 + i \sin 0) = 1/4$ (quando $\rho = 1/4$ e $\theta = 0$)

$z_2 = 1/4 (\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3) = 1/4 \left(-1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{8} + i\frac{\sqrt{3}}{8}$
(quando $\rho = 1/4$ e $\theta = 2\pi/3$)

$z_3 = 1/4 (\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3) = 1/4 (-1/2 - i\sqrt{3}/2) = -1/8 - i\sqrt{3}/8$
(quando $\rho = 1/4$ e $\theta = 4\pi/3$)

Esercizio 2. [10 pt.]

Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 - x_3, -2x_1 - kx_2, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Determinare la matrice associata a f_k.
2. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare f_k è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_k(x, y, z) = (-3, -4, 1)\}.$$

1) La matrice associata e' $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & -k & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\det A = \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & -k & 0 & -2 & -k & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array} = (0+0+2) - (2k+0+6) =$

$= 2 - 2k - 6 = -2k - 4 = 0 \iff k = -2$

Quando $k \neq -2$ la matrice e' invertibile, dunque f_k e' biunivoca.

Se $k = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & +2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+\text{I}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad$ P P L

dimensione Immagine $= 2$
dimensione Nucleo $= 1$

per $k = -2$, f_k non e' ne' iniettiva ne' suriettiva

$\searrow$ segue

3) Se $k \neq -2$, A e' invertibile e dunque

$$f_k(x,y,z)=(-3,-4,1) \iff A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ha un'unica soluzione. Precisamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -k & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I e III}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -k & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+\text{I}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -k+1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -k+1 & -1 & -3 \\ 0 & 2+k & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Se $k=-2$, dall'ultima npe e' evidente che NON ci sono soluzioni, e dunque in questo caso $S_k=\emptyset$

Se invece $k \neq -2$, dalla riduzione ottengo il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ (-k+1)x_2 - x_3 = -3 \\ (2+k)x_2 = 6 \end{cases} \xrightarrow[\text{III}+\text{II}]{\text{Sommo}} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_2 - x_3 = 3 \\ (2+k)x_2 = 6 \end{cases}$$

Quindi $x_2 = \dfrac{6}{2+k}$, $x_3 = 3x_2 - 3 = \dfrac{18}{2+k} - 3 = \dfrac{18-6-3k}{2+k}$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{12-3k}{2+k}$$

$$2x_1 = -x_2 + x_3 + 1 = -\frac{6}{2+k} + \frac{12-3k}{2+k} + \frac{2+k}{2+k} = \frac{-6+12-3k+2+k}{2+k}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{8-2k}{2(2+k)} = \frac{4-k}{2+k}$$

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5x_1 - 4x_2, 6x_1 - 5x_2, x_3, 18x_1 - 12x_2 + 10x_3 - x_4)$$

1. Verificare che il vettore $(1, 1, 0, 3)$ è un autovettore e determinarne l'autovalore.
2. Determinare la matrice A associata a f, il suo polinomio caratteristico e i suoi autovalori.
3. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

1) $f(1,1,0,3) = (5-4, 6-5, 0, 18-12+0-3) = (1,1,0,3)$
$= 1 \cdot (1,1,0,3)$. Quindi $(1,1,0,3)$ e' autovettore di autovalore $\lambda = 1$

2) $$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 18 & -12 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 & 0 \\ 6 & -5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 18 & -12 & 10 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 & 0 \\ 6 & -5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda) (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) \left[(5-\lambda)(-5-\lambda) + 24 \right]$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-1)(-25+\lambda^2+24) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$

Quindi $\lambda = -1$ autovalore di molteplicita' algebrica 2
e $\lambda = 1$ autovalore di molteplicita' algebrica 2

3) $\lambda = 1$

$$A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & -12 & 10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{per 4}]{\text{Divido I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & -12 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV} - 18\text{I}]{\text{II} - 6\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e IV}]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Sistema ridotto: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2 variabili libere: x_3 e x_4. Quindi l'autospazio ha dimensione 2 (molteplicità geometrica 2)

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = x_2 = -5/3 \\ 6x_2 + 10 = 0 & \Rightarrow x_2 = -5/3 \end{cases}$ $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -5/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = x_2 = 1/3 \\ 6x_2 - 2 = 0 & \Rightarrow x_2 = 1/3 \end{cases}$ $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$$A + 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 18 & -12 & 10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} - 3\text{I}]{\text{II} - \text{I}} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{IV - 5III} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } II \text{ e } III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & P & L \end{array} \end{array}$$

2 variabili libere: x_2 e x_4. Quindi l'autospazio ha dimensione 2 (molteplicita' geometrica 2)

Il sistema ridotto: $\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{matrix} x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} 6x_1 - 4 = 0 & \Rightarrow x_1 = 2/3 \\ 2x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \quad \vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \quad \begin{cases} 6x_1 - 0 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \quad \vec{S}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) La matrice e' diagonalizzabile perche' $\{\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4\}$ formano una base di autovettori.

Se $S = \left(\vec{S}_1 \middle| \vec{S}_2 \middle| \vec{S}_3 \middle| \vec{S}_4 \right) = \begin{pmatrix} -5/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ -5/3 & 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e' la matrice cambio di base, si ottiene che

$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e' una matrice diagonale.

Esercizio 4. **[6pt.]**

1. Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:
   - Il vettore $v_1 = (1, 1, 0)$ è un autovettore con autovalore 1,
   - Il vettore $v_2 = (0, 1, 1)$ è un autovettore con autovalore -1,
   - T non è biunivoca,

   e scrivere la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.
2. Sia V il sottospazio $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$. Trovare una base del sottospazio perpendicolare

$$V^\perp = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \perp \vec{y} \text{ per ogni } \vec{x} \in V\}.$$

1) Completo v_1, v_2 ad una base, ad esempio con $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verifichiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono una base:

$$\det\left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sviluppo} \\ \text{lungo la I riga}}}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Deve essere $T(v_1) = 1 \cdot v_1$, $T(v_2) = (-1) \cdot v_2$.

Per avere T non biunivoca, ad esempio si puo' porre $T(v_3) = \underline{0}$

La matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

e' $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se A e' la matrice associata a T rispetto alla base canonica,

allora $S^{-1} A S = B \iff A = S \cdot B \cdot S^{-1}$ dove

la matrice cambio di base $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Con un semplice calcolo si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Notiamo che i vettori di V sono tutti e soli i vettori $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che sono perpendicolari a $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quindi, se $W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e' il sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha che $W^\perp = V$ e quindi

$$V^\perp = (W^\perp)^\perp = W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$