Ingegneria Edile-Architettura

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 25 minuti

24 Giugno 2019

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -1.5**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) L'insieme delle matrici simmetriche 4×4 sono un sottospazio vettoriale di dimensione 8.	☐	☒
2) Se λ è autovalore della matrice quadrata A allora λ^2 è autovalore della matrice $A \cdot A$.	☒	☐
3) Il sottospazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in 2 equazioni e 6 incognite ha almeno dimensione 4.	☒	☐
4) Se $A = S^{-1}BS$ è simile a B allora A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico.	☒	☐
5) Se $z = 2 - i$ allora $\frac{z-\bar{z}}{z^2-\bar{z}^2} = \frac{1}{2}$.	☐	☒
6) Se A e B sono matrici $n \times n$ allora $AB^T + BA^T$ è una matrice simmetrica.	☒	☐
7) Se $A = \{k^3 + 1 \mid k \in \mathbb{N} \cap [1,4]\}$ e $B = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \cap [1,8]\}$ allora $\lvert A \cap B \rvert = 1$.	☒	☐
8) Se $z = \frac{3}{2}\pi i$ allora $e^z = i$.	☐	☒
9) Ogni applicazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è biunivoca.	☒	☐
10) La funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dove $f(z) = \bar{z}^2$ è suriettiva.	☒	☐
11) I vettori $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (2,1,0)$ e $v_3 = (2,0,2)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
12) Se una matrice 4×4 ha due righe uguali, allora il suo nucleo ha dimensione ≥ 2.	☐	☒

Ingegneria Edile-Architettura

Compito di Geometria

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Tempo a disposizione: 120 minuti. Buon lavoro!

24 Giugno 2019

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z - 4\bar{z}^5 = 0$$

$z = 4\bar{z}^5$.

Se $z = (\rho, \theta)$ in coordinate polari, allora $\bar{z} = (\rho, -\theta)$ e $\bar{z}^5 = (\rho^5, -5\theta)$ e $4\bar{z}^5 = (4\rho^5, -5\theta)$.

Quindi $z = 4\bar{z}^5 \iff (\rho, \theta) = (4\rho^5, -5\theta) \iff$

$$\begin{cases} \rho = 4\rho^5 & \Rightarrow \rho = 0 \text{ e } \rho = \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = -5\theta + 2k\pi & \Rightarrow 6\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \dots \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono:

$$z_0 = 0 \qquad (\text{quando } \rho = 0)$$

$$z_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, i$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, i$$

$$z_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, i$$

$$z_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, i$$

Esercizio 2. [10 pt.]
Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, sia $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$T_k(x, y, z) = (-x + 2z, -3\cancel{x} + 2ky, -y + z)$$

1. Determinare la matrice associata a T_k.
2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare T_k.
3. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T_k(x, y, z) = (4, -6, 3)\}.$$

1) $$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 2k & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\det A_k = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2k & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 2k \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2k + 2(3) = $$
$$= -2k + 6$$

Se $-2k+6 \neq 0$, cioe' se $k \neq 3$, allora T_k e' biunivoca e quindi $\dim(\mathrm{Im}(T_k)) = 3$ e $\dim(\ker(T_k)) = 0$.

Se invece $k = 3$,

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 3I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + \frac{1}{6} II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

ha 2 colonne pivot e 1 colonne libera, quindi $\dim(\mathrm{Im}(T_3)) = 2$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T_3)) = 1$.

Il sistema omogeneo associato in forma ridotta e' $\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 6y - 6z = 0 \end{cases}$

Ponendo la variabile libera $\underline{z=1}$ si ottiene $x = 2$, $y = 1$ → segue

Quindi $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ e' una base di $\ker(T_3)$.

3) $\underline{k \neq 3}$ Visto che T_k e' biunivoca, esisterà una e una sola soluzione.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 2k & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{II-3I} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2k & -6 & -18 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{scambio } II \text{ e } III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2k & -6 & -18 \end{array}\right) \xrightarrow{III+2k\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6+2k & -18+6k \end{array}\right)$$

Otteniamo il sistema ridotto

$$\begin{aligned} -x \quad + 2z &= 4 \\ -y + z &= 3 \\ (-6+2k)z &= -18+6k \quad \Rightarrow \quad z = \frac{6k-18}{2k-6} = \frac{6\cancel{(k-3)}}{2\cancel{(k-3)}} = 3 \\ & \qquad (k \neq 3) \end{aligned}$$

$-y+z=3 \Rightarrow -y+3=3 \Rightarrow y=0$

$-x+2z=4 \Rightarrow -x+6=4 \Rightarrow x=2$

Quindi per ogni $k \neq 3$, $S_k = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$

$\underline{k=3}$ Notiamo che $\vec{x}_p = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ e' una soluzione particolare anche in questo caso. Visto che $\ker(T_3)$ ha come base $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ otteniamo che

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Esercizio 3. [10 pt.]

Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1, -12x_1 + x_2 - 8x_4, 9x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 6x_4, -x_4)$$

1. Verificare che il vettore $(-2, 0, 0, 3)$ è un autovettore e determinarne l'autovalore.
2. Determinare la matrice A associata a T, il suo polinomio caratteristico e i suoi autovalori.
3. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

1) $T(-2,0,0,3) = (2, +24-24, -18+18, -3) = (2,0,0,-3)$

e quindi $(-2,0,0,3)$ e' autovettore di autovalore $\lambda = -1$

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 1 & 0 & -8 \\ 9 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico e'

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 1-\lambda & 0 & -8 \\ 9 & -3 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo lungo l'ultima riga)

$(-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -12 & +1-\lambda & 0 \\ 9 & -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo lungo la I riga)

$(-1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2 \cdot (1-\lambda)(2-\lambda)$

$\lambda = -1$ autovalore di molt. alg. 2

$\lambda = 1$ autovalore di molt. alg. 1

$\lambda = 2$ autovalore di molt. alg. 1

$\boxed{\lambda = 1}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -8 \\ 9 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+\frac{9}{2}\text{I}]{\text{II}-6\text{I}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{scambio II e III}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\frac{1}{4}\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' x_3.

Pongo $x_3 = 1$ nel sistema ridotto
$$\begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 6x_4 = 0 \\ -8x_4 = 0 \end{cases}$$

Ottengo $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $-3x_2 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$. Il vettore

$$\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ forma una base dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -1 & 0 & -8 \\ 9 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+3\text{I}]{\text{II}-4\text{I}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\frac{3}{2}\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\frac{\text{III}}{6}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & l & P \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' x_3.

3) $\lambda = -1$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & -8 \\ 9 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 & 6 \\ -12 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II + \frac{4}{3} I} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\quad$ P P L L

2 variabili libere x_3 e x_4.

Il sistema ridotto e'

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Trovo le soluzioni speciali.

$$\begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 3 = 0 & \Rightarrow 9x_1 = 3x_2 - 3 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \\ -2x_2 + 4 = 0 & \Rightarrow x_2 = +2 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 + 6 = 0 & \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \\ -2x_2 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -1$

Notiamo che $3 \cdot \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e' l'autovettore considerato nella domanda 1)

Pongo $x_3 = 1$ nel sistema ridotto $\begin{cases} -3x_1 = 0 \\ -2x_2 - 8x_4 = 0 \\ 18x_4 = 0 \end{cases}$

ottengo $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix}$, $-2x_2 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

Il vettore $\vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forma una base dell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$

4) La matrice e' diagonalizzabile perche' ammette una base di autovettori $\{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4 \}$

La matrice cambio di base $S = \left(\vec{s}_1 \middle| \vec{s}_2 \middle| \vec{s}_3 \middle| \vec{s}_4 \right)$,

cioe' $S = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e' tale che

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ e' diagonale.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che:
   - L'unico autovalore è $\lambda = 2$,
   - Il vettore $v = (1, 2)$ è un autovettore,
   - Il vettore $v = (2, 1)$ *non* è un autovettore,

   e scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica.

2. Sia $\vec{v} = (-1, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$, e sia $V = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{w} \perp \vec{v}\}$.
   (a) Determinare una base di V.
   (b) Determinare una base di $V^\perp = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \perp \vec{y} \text{ per ogni } \vec{x} \in V\}$.

1.) Se l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 2$ avesse dimensione 2, allora sarebbe tutto lo spazio e quindi tutti i vettori non nulli, compreso $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sarebbero autovettori. Dunque l'autospazio ha dimensione 1. Ma il polinomio caratteristico ha grado 2 e visto che $\lambda = 2$ e' l'unica sua soluzione reale, $\lambda = 2$ ha moltepl. algebrica 2. Dunque A <u>non</u> e' diagonalizzabile.

Prendiamo come base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
in modo che $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}$.

Cerchiamo una matrice 2×2 rispetto alla base $\mathcal{B}$, che abbia $\lambda = 2$ come unico autovalore di molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ ha questa proprietà;

ed inoltre il primo vettore della base, cioè $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ha immagine $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ come voluto.

Se A è la matrice rispetto alla base canonica, e $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice cambio di base, allora $B = S^{-1} A S$ e quindi

$$A = S B S^{-1} = (\text{dopo calcoli}) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha le proprietà richieste.

2)

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \iff -x+3y+4z=0$

Si tratta di un piano di $\mathbb{R}^3$.

Una sua base è, ad esempio, $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) Visto che $V = \{\vec{v}\}^\perp = (\mathrm{Span}\{\vec{v}\})^\perp$,

abbiamo che $V^\perp = \left((\mathrm{Span}\{\vec{v}\})^\perp \right)^\perp =$

$= (\mathrm{Span}\{\vec{v}\})^\perp$ ha come base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$