Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 7 Gennaio 2019

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. **[6 pt.]**
Determinare l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le soluzioni complesse z dell'equazione

$$e^{5z} - 16\,e^{\bar{z}} = 0$$

Sia $z = a + ib$

- $e^{5z} = e^{5a + i5b}$ e' il numero complesso di coordinate polari $(\underbrace{e^{5a}}_{\substack{\text{modulo}\\ \rho}}, \underbrace{5b}_{\substack{\text{esponente}\\ \theta}})$

- $e^{\bar{z}} = e^{a-ib}$ e' il numero complesso di coordinate polari $(\underbrace{e^{a}}_{\text{modulo}}, \underbrace{-b}_{\text{esponente}})$

Quindi $16 \cdot e^{\bar{z}} \rightsquigarrow (16e^a, -b)$ in coord. polari

Devo risolvere $e^{5z} = 16\,e^{\bar{z}}$, dunque deve essere $(e^{5a}, 5b) = (16e^a, -b)$ in coordinate polari

Uguaglio i moduli e gli argomenti:

$$\begin{cases} e^{5a} = 16\, e^{a} \\ 5b = -b + 2k\pi \end{cases}$$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

$$e^{5a} = 16\, e^{a} \Rightarrow \log_e e^{5a} = \lg_e 16\, e^{a}.$$

$$\log_e e^{5a} = 5a \quad \text{e} \quad \log_e 16\, e^{a} = \lg_e 16 + \lg_e e^{a}$$

$$= \lg_e 2^4 + \lg_e e^{a} =$$

$$4 \cdot \log_e 2 + a$$

Dunque $5a = 4 \log_e 2 + a \Rightarrow a = \lg_e 2$

Inoltre $5b = -b + 2k\pi \Rightarrow 6b = 2k\pi \Rightarrow$

$b = k\pi/3$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

Concludiamo che S e' il seguente insieme infinito:

$$S = \left\{ \log_e 2 + i \cdot k\pi/3 \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Esercizio 2. [8 pt.]
Sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + z + t = b_1 \\ x + y + 2z = b_2 \\ 2x + 2y + 4z + t = b_3 \end{cases}$$

1. Determinare per quali valori dei termini noti b_1, b_2, b_3 il sistema ammette soluzione.

2. Nel caso particolare in cui $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 7$, trovare l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le soluzioni del sistema.

1) La matrice associata, completa dei termini noti, è la seguente:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & b_2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & b_3-2b_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_3\cancel{-2b_1}-2b_2\cancel{+2b_1} \end{array}\right)$$

Non ci sono righe di zeri nella matrice incompleta, dunque il sistema ammette sempre soluzione per ogni scelta dei termini noti b_1, b_2, b_3

l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le soluzioni è

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{x}_p + \vec{v} \;\middle|\; \vec{v} \in \text{SPAZIO NULLO} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2) Nel caso particolare in cui $b_1 = 1$; $b_2 = 3$; $b_3 = 7$

la riduzione porta alla matrice:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} P & L & P & P \end{array} \end{array}$$

cioè al sistema ridotto

$$(A) \begin{cases} x+y+z+t = 1 \\ z-t = 2 \\ t = 1 \end{cases}$$

y è la VARIABILE LIBERA

Per trovare una soluzione particolare, basta porre la variabile libera $y=0$ e risolvere (A):

$t=1$, $z = 2+t = 3$, $x+0+3+1 = 1 \Rightarrow x=-3$

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo lo spazio nullo della matrice associata che, come abbiamo visto sopra, una volta ridotta diventa:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & P & P \end{array} \end{array}$$

Troviamo la soluzione speciale ponendo la variabile libera $y=1$ nel sistema omogeneo ridotto:

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ z-t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Si ottiene: $t=0$, $z=t=0$, $x+1+0+0=0 \Rightarrow x=-1$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi lo spazio nullo è $\mathrm{Span}\{\vec{s}\}$ e

Esercizio 3. [10 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2\,,\ -x_3\,,\ -2x_1 - x_2 + 2x_3\,,\ -x_4)$$

1. Determinare il polinomio caratteristico della matrice A associata ad f.
2. Determinare la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ciascuno degli autovalori.
3. Determinare una base per ciascuno degli autospazi.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

1) La matrice associata ad f e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico e' $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo l'ultima riga)}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \text{(sviluppo lungo la prima riga)}$$

$$= (-1-\lambda) \cdot \left[(-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right] =$$

$$(-1-\lambda)\cdot\left[-\lambda\cdot\left((-\lambda)(2-\lambda)-1\right)+1\cdot(-2)\right]=$$

$$(-1-\lambda)\cdot\left[-\lambda\left(-2\lambda+\lambda^2-1\right)-2\right]=(-1-\lambda)\left(2\lambda^2-\lambda^3+\lambda-2\right)$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2)$$

Con raccoglimento parziale $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2=\lambda^2(\lambda-2)-1(\lambda-2)=$
$=(\lambda^2-1)(\lambda-2)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$.

(La stessa scomposizione si poteva ottenere anche col metodo di Ruffini.)

Dunque $P_A(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda-2)$

2) e 3) Gli autovalori sono tutti reali e sono $\lambda=-1,1,2$

$\underline{\lambda=-1}$ Ha molteplicità algebrica 2

Il relativo autospazio $Aut(A,-1)=N(A+1\cdot I)$

è lo spazio nullo della matrice

$$A+I=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\-2&-1&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{III+2I}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III+3II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Le variabili libere sono x_3 e x_4

Troviamo le soluzioni speciali utilizzando il sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$ $\Rightarrow$ $x_2 = x_3$ e quindi $x_2 = 1$; $x_1 = x_2$ e quindi $x_1 = 1$ $\quad \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$ $\Rightarrow$ $x_2 = x_3$ e quindi $x_2 = 0$; $x_1 = x_2$ e quindi $x_1 = 0$ $\quad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = -1$ e' 2 e $\{\vec{S}_1, \vec{S}_2\}$ e' una base del relativo autospazio.

$\underline{\lambda = 1}$ Ha molteplicita' algebrica 1 e quindi necessariamente ha molteplicita' geometrica 1.

L'autospazio $Aut(A, 1) = N(A - 1 \cdot I)$ e' lo spazio nullo della matrice $A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{III-2I} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+II} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[III \text{ e } IV]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & P \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' x_3.

Troviamo la soluzione speciale utilizzando il sistema ridotto

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = 1 \Rightarrow$

$x_4 = 0$

$-x_2 = x_3$ e quindi $x_2 = -1$

$-x_1 = x_2$ e quindi $x_1 = 1$

$$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{\vec{S}_3\}$ e' una base dell'autospazio $Aut(A, 1)$

$\underline{\lambda = 2}$ Ha molteplicità algebrica 1, e quindi ha molteplicità geometrica 1.

L'autospazio $Aut(A,2) = N(A-2I)$ e' lo spazio nullo della matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-I}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III e IV}]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

La variabile libera e' x_3. Troviamo la soluzione speciale utilizzando il sistema ridotto
$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_1 &= -\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{4} \end{aligned} \qquad \vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{\vec{s}_4\}$ e' una base dell' autospazio $Aut(A, 2)$

<u>N.B.</u> Per evitare coordinate frazionarie, si puo' considerare $\vec{s}_4' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\vec{s}_1$.

4) La matrice A e' diagonalizzabile perche' ha tutti gli autovalori reali, e le molteplicita' algebriche coincidono con le molteplicita' algebriche, e quindi esiste una base di autovettori

$$\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4\}$$

La matrice S è la matrice "cambio di base", cioè

$$S = \left(\vec{s}_1 \middle| \vec{s}_2 \middle| \vec{s}_3 \middle| \vec{s}_4 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S^{-1} A S$ è la matrice associata ad f rispetto alla base di autovettori $B = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4\}$ e quindi

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ è la matrice

diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori che corrispondono rispettivamente agli autovettori $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4$ della base.

Non era richiesto il calcolo di S^{-1}. Col metodo di riduzione di Gauss-Jordan si poteva ricavare che

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -4/3 & 0 & 4/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. [8pt.]

1. Trovare una base del sottospazio $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - 3y + t = 0\}$.

2. Trovare un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}(g) = \ker(g)$.

3. Esistono applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$?
(Giustificare la risposta.)

1) Il sottospazio V e' il nucleo dell'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ dove $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 2x - 3y + t$.

La matrice 1×4 associata ad f e' la matrice

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & L & L \end{array} \end{array}$$

che e' banalmente gia' ridotta.

Le variabili libere sono y, z, t.

Troviamo le soluzioni speciali:

$\begin{matrix} y=1 \\ z=0 \\ t=0 \end{matrix} \Rightarrow 2x - 3 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ $\qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} y=0 \\ z=1 \\ t=0 \end{matrix} \Rightarrow 2x - 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ $\qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{matrix} \Rightarrow 2x - 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ $\qquad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dunque una base di V è

$$\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per evitare coordinate frazionarie, si può prendere $\vec{s}_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{s}_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Forse l'esempio più semplice è il seguente.

Prendiamo $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ applicazione lineare

tale che $g(e_1) = 0$; $g(e_2) = 0$;

$g(e_3) = e_1$, $g(e_4) = e_2$

dove e_1, e_2, e_3, e_4 sono i vettori della base

canonica di $\mathbb{R}^4$. La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Allora $\ker g = \operatorname{Im} g = \operatorname{Span}\{e_1, e_2\}$.

3) No, non esistono.

Ricordiamo infatti che $\dim(\operatorname{Im}(f))$ = numero colonne pivot

e che $\dim(\ker(f))$ = numero variabili libere.

Dunque per ogni applicazione lineare $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

si ha che $\dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = m$.

Nel nostro caso $m = 3$ e non esistono numeri

interi k tali che $k + k = 3$.