Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria - A — 17 Febbraio 2020

Tempo a disposizione: 20 minuti

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [4 pt.] Determinare gli elementi di $X \cap Y$ dove

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 89\} \quad \text{e} \quad Y = \{x \mid \exists y \in \mathbb{Z}\ x = 2y^3 + 1\}.$$

Soluzione: $X \cap Y = \{3, 17, 55\}$

Esercizio 2. [4 pt.] Siano $w, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Scrivere con una formula la proprietà: "$w \notin \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$".

Soluzione: $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad w \neq \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$

Esercizio 3. [4pt.] Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Soluzione: $(1, -1)$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(Punteggio: risposta esatta = 3; risposta mancante = 0; risposta sbagliata errata = -1.5.)

	Vera	Falsa
1) La somma di due autovettori è un autovettore.	☐	☒
2) Per ogni $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$, esistono tre diversi numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = w$.	☒	☐
3) Se $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare allora $0 \in \ker(f)$ e $0 \in \operatorname{Im}(f)$.	☒	☐
4) Per ogni matrice B, la matrice $B \cdot B^T$ è simmetrica.	☒	☐
5) Se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora $V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w \perp v \text{ per ogni } v \in V\}$ è un sottospazio.	☒	☐
6) Il sistema $\begin{cases} x - 3y = b_1 \\ 2x - 6y = b_2 \end{cases}$ ha esattamente una soluzione (x, y) per ogni $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.	☐	☒

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria - B — 17 Febbraio 2020

Tempo a disposizione: 20 minuti

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. [4 pt.] Determinare gli elementi di $A \cap B$ dove

$$A = \{x \mid \exists y \in \mathbb{Z}\ x = 3y^2 + 1\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 69\}.$$

Soluzione: $A \cap B = \{4, 13, 28, 49\}$

Esercizio 2. [4 pt.] Siano $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Scrivere con una formula la proprietà: "$v_1, \ldots, v_k$ non sono linearmente indipendenti".

Soluzione: $\exists\, \vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^n, \vec{\lambda} \neq 0$ t.c. $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$

Esercizio 3. [4 pt.] Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Soluzione: $(-1, 1)$

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(Punteggio: risposta esatta = 3; risposta mancante = 0; risposta sbagliata errata = -1.5.)

	Vera	Falsa
1) Per ogni $w \in \mathbb{C}$ diverso da zero, esistono due numeri $z \in \mathbb{C}$ distinti tali che $z^2 = w$.	☒	☐
2) Il sistema $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 = b_1 \\ -x_1 + 4x_2 = b_2 \end{cases}$ ha esattamente una soluzione (x, y) per ogni $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.	☐	☒
3) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'appl. lineare allora $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.	☒	☐
4) Se $v \neq 0$ appartiene allo spazio nullo di una matrice quadrata, allora v è un autovettore.	☒	☐
5) Se V, W sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$, allora anche $V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$ è un sottospazio.	☒	☐
6) Per ogni matrice quadrata A, la matrice $A^T \cdot A$ è simmetrica.	☒	☐

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 17 Febbraio 2020

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Determinare l'insieme S di tutte le soluzioni complesse z dell'equazione

$$8\,\overline{z}^3 = i \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$,

quindi $i \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = i\cdot(-i) = -i^2 = 1$.

Devo risolvere $8\overline{z}^3 = 1$

In coordinate polari: $z = (\rho, \theta) \Rightarrow$

$\overline{z} = (\rho, -\theta) \Rightarrow \overline{z}^3 = (\rho^3, -3\theta) \Rightarrow$

$8\overline{z}^3 = (8\rho^3, -3\theta)$, mentre $1 = (1, 0)$

$$\begin{cases} 8\rho^3 = 1 \Rightarrow \rho = \sqrt[3]{1/8} = 1/2 \\ -3\theta = 0 + 2k\pi \Rightarrow \theta = -2k\pi/3 = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

(poi i θ si ripetono)

Le soluzioni sono

$z_1 = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$, cioè $z_1 = \frac{1}{2}$

$z_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi \right)$, cioè $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i \sin\frac{2}{3}\pi \right) =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) =$

$-1/4 + \sqrt{3}/4 \, i$

$z_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\pi \right)$; cioè $z_3 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \sin\frac{4}{3}\pi \right) =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) =$

$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i$

Esercizio 2. [10 pt.]

Al variare del parametro k, si consideri la funzione $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo:

$$T_k(x, y, z) \;=\; (x + y + 4z,\; kx + 2z,\; -2x + y + (5 - k)z)$$

1. Dimostrare che T_k è un'applicazione lineare e determinarne la corrispondente matrice associata A_k (rispetto alla base canonica).
2. Determinare per quai valori di k l'applicazione lineare T_k è invertibile.
3. Determinare al variare di k la dimensione e una base di $\ker(T_k)$ e di $\mathrm{Im}(T_k)$.
4. Determinare al variare di k quanti elementi contiene l'insieme

$$S_k \;=\; \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid T_k(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, 1)\}.$$

1. $$T_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5-k \end{pmatrix},$$

quindi e' un'applicazione lineare. La matrice associata e'

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ k & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 5-k \end{pmatrix}$$

2. A_k e' invertibile $\iff \det A_k \neq 0$.

Usando la formula di Sarrus:

$$\det A_k = \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 & k & 0 \\ -2 & 1 & 5-k & -2 & 1 \end{array} = 0 - 4 + 4k - \big(k(5-k) + 2 + 0\big)$$

$$= -4 + 4k - (5k - k^2 + 2) = k^2 - k - 6 = 0 \iff$$

$k = 3$, $k = -2$. Quindi T_k e' invertibile se e solo se $k \neq 3$ e $k \neq -2$.

3. Quando $k \neq 3$ e $k \neq -2$, T_k e' invertibile, quindi $\ker T_k = \{0\}$ e $\operatorname{Im} T_k = \mathbb{R}^3$.

In questo caso $\ker T_k$ ha dimensione 0, e $\operatorname{Im} T_k$ ha dimensione 3 e ha come base la base canonica $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Quando $\underline{\underline{k=3}}$,

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} P & P & L \end{array}$$

In questo caso $\dim(\ker(T_k)) = 1$ e $\dim(\operatorname{Im}(T_k)) = 2$

Una base dell'immagine si ottiene prendendo le colonne pivot nella matrice iniziale, quindi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per trovare una base del nucleo, troviamo la soluzione speciale. Poniamo la variabile libera $z=1$ nel sistema ridotto

$$\begin{cases} x + y + 4z = 0 & \Rightarrow x = \frac{10}{3} - 4 = -\frac{2}{3} \\ -3y - 10z = 0 & \Rightarrow y = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Quindi una base dell'immagine è $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ -10/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Resta infine da considerare il caso $\underline{\underline{k = -2}}$:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+2\mathrm{I}]{\mathrm{II}+2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\frac{3}{2}\mathrm{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

Anche in questo caso $\dim(\ker T_k) = 1$ e $\dim(\operatorname{Im} T_k) = 2$.

Una base dell'immagine si trova considerando le colonne pivot nella matrice iniziale, quindi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Troviamo ora la soluzione speciale ponendo la variabile libera $z = 1$ nel sistema ridotto

$$\begin{cases} x + y + 4z = 0 & \Rightarrow \quad x = +5 - 4 = 1 \\ 2y + 10z = 0 & \Rightarrow \quad y = -5 \end{cases}$$

Una base del nucleo è quindi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Per $K \neq 3$ e $K \neq -2$, la appl. lineare $T_K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e' biunivoca, e quindi

$\mathcal{S}_K$ contiene esattamente un vettore (esistono vettori $\vec{v}$ t.c. $T_K(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ perche' T_K e' suriettiva; non possono esistere più di uno di tali vettori perche' T_K e' iniettiva)

Per $K = 3$, riducendo la matrice completa si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -10 & -7 \\ 0 & 3 & 10 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'ultima riga di zeri fa capire che il sistema ha soluzioni. Visto che c'è una variabile libera e la dimensione del nucleo è 1,

$$\mathcal{S}_K = \{ \vec{x}_p + \vec{v} \mid \vec{v} \in \ker T_K \}$$ dove

$\vec{x}_p$ e' una qualunque soluzione particolare, e l'insieme $\mathcal{S}_K$ e' infinito perche' $\ker(T_K)$ contiene infiniti vettori.

Per $k = -2$, riducendo la matrice completa si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 3 & 15 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\frac{3}{2}\text{II}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Dall'ultima riga si capisce che il sistema non ha soluzione.

Quindi, in questo caso, $\mathcal{S}_k = \emptyset$.

Esercizio 3. [**10 pt.**] OK

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 3x_2 - 6x_4\,,\ 11x_2 - 18x_4\,,\ 6x_1 + 6x_2 - x_3 - 12x_4\,,\ 6x_2 - 10x_4)$$

1. Determinare la matrice A associata a f.
2. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
3. Per ciascun autovalore, determinare la molteplicità geometrica e una base del relativo autospazio.
4. Trovare, se esiste, una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS = D$ è una matrice diagonale.

1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 11 & 0 & -18 \\ 6 & 6 & -1 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

2. Troviamo il polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 11-\lambda & 0 & -18 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{-1-\lambda} & \cancel{-12} \\ 0 & 6 & 0 & -10-\lambda \end{pmatrix}$$

Sviluppo lungo la III colonna, ed ottengo:

$$(-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} \cancel{2-\lambda} & \cancel{3} & \cancel{-6} \\ 0 & 11-\lambda & -18 \\ 0 & 6 & -10-\lambda \end{pmatrix}.$$

Sviluppo lungo la I colonna ed ottengo

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda) \det \begin{vmatrix} 11-\lambda & -18 \\ 6 & -10-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)\left[(11-\lambda)(-10-\lambda) + 108\right]$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda)(-110 - 11\lambda + 10\lambda + \lambda^2 + 108) =$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (-1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-2) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2$$

Quindi: $\lambda = -1$ e' autovalore di molt. alg. 2

$\lambda = 2$ e' autovalore di molt. alg. 2

3. $\underline{\lambda = -1}$ L'autospazio e' lo spazio nullo di $A+I$:

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & 0 & -18 \\ 6 & 6 & 0 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - 2I} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV - \frac{1}{2} II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 12 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Ci sono due variabili libere, quindi $\dim N(A+I) = 2$ e $\lambda = -1$ ha molt. geometrica 2

Troviamo le soluzioni speciali.

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \quad -6x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ 12x_2 \quad -18x_4 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \qquad x_4 = 1 \qquad \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 0 \Rightarrow 3x_1 + \frac{9}{2} - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ 12x_2 - 18x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base dell'autospazio e' $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\lambda = 2}$ L'autospazio e' lo spazio nullo di $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 0 & -18 \\ 6 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 9 & 0 & -18 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{III e II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 9 & 0 & -18 \\ 0 & 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-2\text{II}]{\text{III}-3\text{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 6 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Ci sono due variabili libere, quindi dim $(A + 2I) = 2$ e $\lambda = 2$ ha molt. geometrica 2.

Troviamo le soluzioni speciali.

$$x_3 = 1 \qquad x_4 = 0 \qquad \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 12x_4 = 0 \Rightarrow 6x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ 3x_2 - 6x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \qquad x_4 = 1 \qquad \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 12x_4 = 0 \Rightarrow 6x_1 + 12 - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 3x_2 - 6x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base dell'autospazio e' $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di autovettori, quindi la matrice A e' diagonalizzabile. Utilizzando la matrice "cambio di base"

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ si ottiene che

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e' la matrice diagonale avente gli autovalori sulla diagonale.

Esercizio 4. [6pt.]

1. Trovare una base del sottospazio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = x_2 \text{ e } x_3 = x_4 = x_5\}$$

2. Determinare per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore della seguente matrice:

$$A_h = \begin{pmatrix} h^2 & 3 \\ 2 & h+3 \end{pmatrix}$$

1. Basta notare che i vettori di W sono tutti e soli i vettori della forma $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \\ b \\ b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$ qualunque.

Quindi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di W.

2. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ è autovettore se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix} h^2 & 3 \\ 2 & h+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, cioè

$$\begin{pmatrix} 3h^2 - 6 \\ 6 - 2h - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3h^2 - 6 = 3\lambda \\ -2h = -2\lambda \end{cases}$$

Ricaviamo λ da entrambe le equazioni:

$$\lambda = \frac{3h^2-6}{3} = h^2-2$$

$$\lambda = \frac{-2h}{-2} = h$$

Quindi $h^2-2 = h \iff h^2-h-2=0 \iff$

$h=-1$ o $h=2$

Quindi, quando $h=-1$, il vettore $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = h = h^2-2 = -1$;

e quando $h=2$, il vettore $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = h = h^2-2 = 2$

Per $h \neq -1$ e $h \neq 2$, $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ <u>NON</u> è autovettore.