COMPITO del 7/1/2021

ESERCIZIO 1

Gauss-jordan: Inversa di $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III} - 2\mathrm{I}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{III} + 4\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} + \frac{3}{2}\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3/2 & 6 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} - 2\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} -1 \cdot \mathrm{II} \\ \frac{1}{2} \cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

L'inversa cercata è $\begin{pmatrix} 3/2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO 2

ESERCIZIO 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

= (la matrice e' triangolare, quindi il suo det e' il prodotto degli elementi sulla diagonale) $(-2-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) = \lambda(\lambda+2)^2(\lambda-3)$

Gli autovalori sono
$\lambda = 0$ con molt. alg. 1
$\lambda = -2$ con molt. alg. 2
$\lambda = 3$ con molt. alg. 1

Troviamo una base per ciascuno degli autospazi.

$\underline{\lambda = 0}$ $\quad Aut_A(0) = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Riduco:

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{1}{2} III} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_3$ e' l'unico

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

variabile libera.

Trovo la soluzione speciale ponendo $x_3 = 1$ nel sistema omogeneo ridotto:

$$\begin{cases} -2x_1 \quad -6x_3 - 12x_4 = 0 & \longrightarrow \ -2x_1 - 6 - 12 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \\ \quad 3x_2 \qquad\qquad = 0 & \Longrightarrow \ x_2 = 0 \\ \qquad\qquad 4x_4 = 0 & \Longrightarrow \ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

autovettore di autovalore $\lambda = 0$

Una base dell'autospazio $Aut_A(0) = \ker A$ è $\{\vec{v}_1\}$

$\underline{\lambda = -2}$ $\qquad Aut_A(-2) = \ker(A + 2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Riduco:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} L & P & P & L \end{array} \end{array}$$

La matrice è già ridotta.

Ci sono 2 variabili libere, cioè x_1 e x_4.

Trovo le 2 soluzioni speciali.

(1) $x_1 = 1$ $\qquad \begin{cases} \quad -6x_3 - 12x_4 = 0 \ \longrightarrow \ -6x_3 - 12 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$

(1) $x_4 = 0$ $\quad \begin{cases} 5x_2 = 0 \implies x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \implies x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = -2$

(2) $x_1 = 0$, $x_4 = 1$ $\quad \begin{cases} -6x_3 - 12x_4 = 0 \to -6x_3 - 12 \cdot 1 = 0 \implies x_3 = -2 \\ 5x_2 = 0 \implies x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \implies x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = -2$

Una base dell'autospazio $Aut_A(-2) = \ker(A + 2I)$ e' $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

$\underline{\lambda = 3}$ $\quad Aut_A(3) = \ker(A - 3I) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Riduco:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & P \end{matrix} \end{array}$$

x_2 e' l'unica variabile libera. Trovo la soluzione speciale:

$\begin{cases} -5x_1 - 6x_3 - 12x_4 = 0 \to -5x_1 - 6 \cdot 0 - 12 \cdot 0 = 0 \implies x_1 = 0 \end{cases}$

$\lambda_2 = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} -3x_3 + 4x_4 = 0 \rightarrow -3x_3 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ -5x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{array} \right.$

$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' autovettore di autovalore $\lambda = 3$

Una base dell'autospazio $Aut_A(3) = \ker(A - 3I)$ e' $\{\vec{v}_4\}$.

Visto che tutti gli autovalori sono reali, e che per ognuno di essi la molteplicita' algebrica = molteplicita' geometrica, si ha che $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ e' una base di autovettori, e la matrice A e' diagonalizzabile.

Se $S = \left(\vec{v}_1 \,\vdots\, \vec{v}_2 \,\vdots\, \vec{v}_3 \,\vdots\, \vec{v}_4 \right) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e' la matrice cambio di base, si ha che $S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e' la matrice diagonale con gli autovalori corrispondenti a $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ sulla diagonale.

ESERCIZIO 3

Trovare le soluzioni complesse dell'equazione:

$$27z^3 - 8i = 0$$

Usiamo le coordinate polari:

$z \rightsquigarrow (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 \rightsquigarrow (\rho^3, 3\theta) \Rightarrow 27z^3 = (27\rho^3, 3\theta)$

$8i \rightsquigarrow (8, \pi/2)$

$$27z^3 = 8i \Rightarrow \begin{cases} 27\rho^3 = 8 & \longrightarrow \rho = 2/3 \\ 3\theta = \pi/2 + 2k\pi & \longrightarrow \theta = \pi/6 + \frac{2\pi}{3} \cdot k \end{cases}$$

Le soluzioni in coordinate polari sono:

$z_1 = \left(2/3, \overset{k=0}{\pi/6}\right)$; $z_2 = \left(2/3, \pi/6 + \overset{k=1}{2\pi/3}\right) = \left(2/3, \frac{5}{6}\pi\right)$

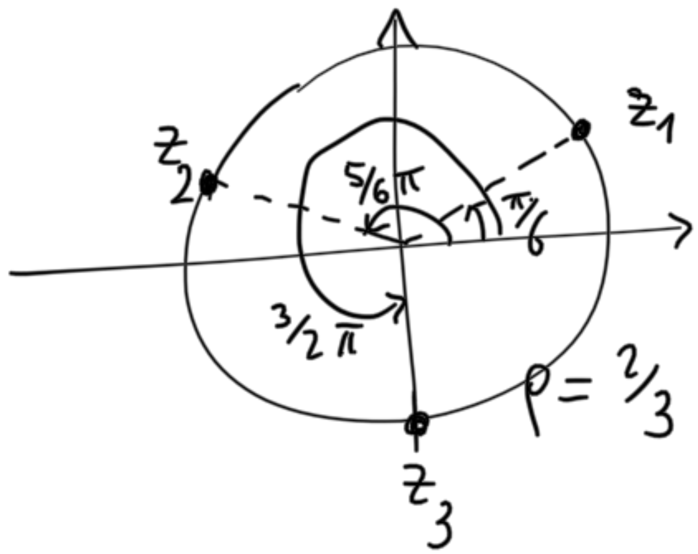
$z_3 = \left(2/3, \pi/6 + \overset{k=2}{4\pi/3}\right) = \left(2/3, \frac{3}{2}\pi\right)$. Per $k = 3, 4, \dots$ o $k = -1, -2, \dots$ le soluzioni si ripetono.

In coordinate cartesiane:

$$z_1 \rightsquigarrow \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$z_2 \rightsquigarrow \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$$

$$z_3 \rightsquigarrow \frac{2}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\cdot\sin\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{2}{3}\left(0 - 1\cdot i\right) = -\frac{2}{3}i$$



ESERCIZIO 4

1. Definiamo f sui vettori della base canonica $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ad esempio poniamo $f(e_1) = e_2$ e $f(e_2) = e_2$.

   Allora $f(f(e_1)) = f(e_2) = e_2 = f(e_1)$ e

   $f(f(e_2)) = f(e_2) = e_2 = f(e_2)$.

Quindi $f \neq 0$ e $f \neq id$ e $f \circ f = f$.

Quindi [illegible]

La matrice associata ad f (rispetto alla base canonica)

e' $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Un'altro semplice esempio e' l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dove $f(e_1) = 0$ e $f(e_2) = e_1 + e_2$, la cui matrice associata e'

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Infatti $f(f(e_1)) = f(0) = 0 = f(e_1)$ e

$$f(f(e_2)) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) =$$
$$= 0 + (e_1 + e_2) = f(e_2).$$

2. Sia λ un autovalore di A e sia $\vec{v} \neq 0$ un autovettore di autovalore λ, dunque $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

Adesso $A \cdot (A \cdot \vec{v}) = A \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \cdot (A \vec{v}) = \lambda (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda^2 \vec{v}$.

Inoltre $A \cdot (A \cdot \vec{v}) = (A \cdot A)(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$.

Quindi $\lambda^2 \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} \implies \lambda^2 = \lambda \implies \lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$