GEOMETRIA – Compito scritto del 7/6/2021

ESERCIZIO 1

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) $\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{sviluppo lungo la I riga}}{=} (1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$\underset{\text{sviluppo lungo la I colonna}}{=} (1-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+2)$

Il polinomio caratteristico e' $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+2)$

Gli autovalori di A sono:

- $\lambda = 0$ con m.a. $= 2$
- $\lambda = 1$ con m.a. $= 1$
- $\lambda = -2$ con m.a. $= 1$

2) Autospazi:

-) $V(0) = \ker(A - 0\cdot I) = \ker A$

- $\lambda = 0 \qquad Aut_A(0) = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV + I]{II + 2I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P L P L

x_2 e x_4 variabili libere.

$$x_2 = 1,\ x_4 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soluz. speciale}$$

$$x_2 = 0,\ x_4 = 1 \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{soluz. speciale}$$

$\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ e' una base dell'autospazio $Aut_A(0)$, che quindi ha dimensione 2. La m.g. di $\lambda = 0$ e' 2.

- $\lambda = 1 \qquad Aut_A(1) = \ker(A - 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e IV}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ \dots \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array}$$

Variabile libera x_4.

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 \qquad -x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_3 \qquad = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ -x_2 + 0 + 2 = 0 \to x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soluzione speciale. $\mathcal{B} = \{ \vec{S}_3 \}$ base dell'autospazio $Aut_A(1)$, che ha quindi dimensione 1.

La m.g. di $\lambda = 1$ e' 1.

- $\lambda = -2$ $\quad Aut_A(-2) = \ker(A + 2I) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e IV}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+3I]{II-2I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio III e IV}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

x_3 e' variabile libera.

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P & P & L & P \end{array}$$

$x_3 = 1$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_4 = 0 & \rightarrow \quad -x_1 + 0 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 & \rightarrow \quad 2x_2 + 2 - 0 = 0 \rightarrow x_2 = -1 \\ 6x_4 = 0 & \rightarrow \quad x_4 = 0 \end{cases}$$

$\vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e' soluzione speciale. $\mathcal{B} = \{\vec{s}_4\}$ base di $Aut_A(-2)$, che ha quindi dimensione 1. La m.g. di $\lambda = -2$ e' 1.

3) La matrice A e' diagonalizzabile perche' ha una base di autovettori

$$\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, s_2, s_3, s_4\} = \left\{ \underset{\lambda=0}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=0}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-2}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

Prendendo la matrice invertibile "cambio di base" $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene che

$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e' diagonale.

ESERCIZIO 2

Se $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e' la base canonica di $\mathbb{R}^4$, definiamo $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ appl. lineare ponendo:

$$T(e_1) = 0, \quad T(e_2) = 0, \quad T(e_3) = e_1, \quad T(e_4) = e_2 .$$

Ricordiamo che un'A.L. e' univocamente determinata dai valori che assume su una base.

Notiamo che $e_1, e_2 \in \ker T$ e che $e_1, e_2 \in \operatorname{Im} T$.

Visto che $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 4$ e che $\dim(\ker T) \geq 2$ e $\dim(\operatorname{Im} T) \geq 2$, deve essere $\dim(\ker T) = \dim(\operatorname{Im} T) = 2$ e quindi $\ker T = \operatorname{Im} T = \operatorname{Span}\{e_1, e_2\}$.

La matrice associata a T rispetto alla base canonica e'

$$\left(T(e_1) \middle| T(e_2) \middle| T(e_3) \middle| T(e_4) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notiamo che <u>NON</u> esistono A.L. $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.c.

$\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$ che siano diagonalizzabili.

Infatti $\dim(\ker(T)) = 2$. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base di $\ker T$.

Allora v_1 e v_2 sono autovettori linearm. indip. di autovalore $\lambda = 0$.

Se per assurdo esistesse una base di autovettori $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

allora si avrebbe che $T(v_3) = \lambda_3 v_3$ e $T(v_4) = \lambda_4 v_4$.

Notiamo che $\lambda_3 \neq 0$ altrimenti v_3 sarebbe autovettore di autovalore $\lambda_3 = 0$

ed avremmo che $v_1, v_2, v_3 \in \mathrm{Aut}_T(0) = \ker T$ avrebbe dimensione ≥ 3

mentre sappiamo che $\dim(\ker T) = \dim(\mathrm{Im}\, T) = 2$.

Ma se $\lambda_3 \neq 0$, allora $\lambda_3 v_3 \in \mathrm{Im}\, T = \ker T = \mathrm{Span}\{v_1, v_2\}$,

e questo è impossibile perché v_1, v_2, v_3 sono linearmente indip.