GEOMETRIA - PROVA SCRITTA del 28/06/2021

(1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1.1 Il polinomio caratteristico $P_\lambda(A) = \det(A - \lambda I) =$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

in una matrice triangolare il determinante e' il prodotto degli elementi sulla diagonale

$$= (2-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda)^2 = \lambda(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

Gli autovalori sono tutti reali, e precisamente:

$\lambda = 0$ con m.a. 1

$\lambda = 2$ con m.a. 1

$\lambda = -1$ con m.a. 2

1.2 $\lambda = 0$

$$\mathrm{Aut}_0(A) = \ker(A - 0\cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La prima colonna e' il vettore nullo, quindi $A \cdot e_1 = \vec{0}$, cioe' $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A$ e' autovettore. Visto che $\lambda = 0$ ha m.a. $= 1$ ha anche m.g. $= 1$ e quindi $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base dell'autospazio $\mathrm{Aut}_0(A) = \ker(A)$.

$\lambda = 2$

$$\mathrm{Aut}_2(A) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio II e III}} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio III e IV}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

Variabile libera x_3.

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_3 = 1$ nel sistema: $\begin{cases} -3x_2 - 3x_3 = 0 \rightarrow -3x_2 - 3 = 0 \quad x_2 = -1 \\ -3x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$

Infine, sostituendo nella I equazione: $-2x_1 + 5 - 1 - 0 = 0 \rightarrow x_1 = 2$

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ è une base di $Aut_2(A)$.

$\lambda = -1$

$$Aut_{-1}(A) = \ker(A + 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

Le variabili libere sono x_3 e x_4.

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 - 0 - 1 + 0 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ 3x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$

$x_3 = 0$ $\Big\{$ $x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 - 0 - 0 + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1$

$x_4 = 1 \qquad \Big| \qquad 3x_2 = 0 \to x_2 = 0$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base di $\mathrm{Aut}_{-1}(A)$.

Quindi la m.g. dell'autovalore $\lambda = -1$ è 2 = m.a.

1.3. Visto che tutti gli autovalori sono reali, e che per ogni autovalore la m.a. e la m.g. coincidono, la matrice A è diagonalizzabile.

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 = \left\{ \underset{\lambda=0}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=2}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\lambda=-1}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

è una base di autovettori.

Considerando la matrice "cambio di base"

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \dots \end{pmatrix} \quad \text{si ottiene che } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è diagonale.

(2) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ A.L. Sia A la matrice associata.

Visto che $\lambda = 0$ è autovalore, $\ker(A - 0 \cdot I) = \ker A \neq \{0\}$, e quindi $\dim(\ker(F)) \geq 1$. Visto che $\dim(\mathrm{Im}(F)) = 3$, deve essere $\dim(\ker(F)) = 1$. (Ricordare che $\dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F)) = 4$)

Un'A.L. con le proprietà richieste è ad esempio l'A.L. $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ t.c.

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \quad F\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \quad F\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \quad F\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Questo esempio mostra che esistono A.L. con le proprietà richieste che sono diagonalizzabili.