Geometria — Compito scritto del 13 Settembre 2021

Le risposte devono essere giustificate

Buon lavoro!

Esercizio 1. Determinare le soluzioni z dell'equazione complessa

$$z^3 \cdot \overline{z} \;=\; 16$$

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare il polinomio caratteristico di A.
2. Determinare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica.
3. Trovare, se esiste, una base di autovettori di A.

1/

$$z^3 \cdot \bar{z} = 16$$

$z = (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 = (\rho^3, 3\theta)$

$\bar{z} = (\rho, -\theta)$ e quindi $z^3 \cdot \bar{z} = (\rho^4, 2\theta)$.

$16 = (16, 0)$

In coordinate polari $z^3 \cdot \bar{z} = 16 \Longleftrightarrow (\rho^4, 2\theta) = (16, 0)$

$$\begin{cases} \rho^4 = 16 \\ 2\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt[4]{16} = 2$$

$\theta = k\pi = 0, \pi$ (e poi si ripete)

$z_1 = (2, 0) = 2$

$z_2 = (2, \pi) = -2$

2/

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 6 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & -4 \\ 6 & -5-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda) \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda) \cdot \left[(2-\lambda)(-5-\lambda) + 12 \right] =$$

$$= (-2-\lambda) \left[-10 - 2\lambda + 5\lambda + \lambda^2 + 12 \right] =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = -(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda+2) =$$

$$-(\lambda+2)^2(\lambda+1)$$

$\lambda = -2$ autovalore di m.a 2

$\lambda = -1$ autovalore di m.a. 1

$\underline{\lambda = -2}$

$$Aut(A, -2) = \ker(A + 2I) = \ker\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - \frac{3}{2}I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} P & L & L \end{array} \end{array}$$

$m.g. = 2$

$$\{ 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$$

Variabili libere x_2 e x_3

$x_2 = 1$
$x_3 = 0$

$$4x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$
$x_3 = 1$

$$4x_1 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$Aut(A, -1) = \ker(A + I) = \ker\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} P & L & P \end{array} \end{array}$$

x_2
VAR. LIBERA

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad x_2 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = 0$$

$$3x_1 - 2 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \qquad \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base di autovettori $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$

autovalore $\lambda = -2$ autovalore $\lambda = -1$

Se $S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, allora

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$