GEOMETRIA compito scritto del 14/2/2022

Esercizio 1 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ appl. lineare dove $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-y \\ -2x+3y \end{pmatrix}$

La matrice associata a T rispetto alla base canonica e' $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

La matrice "cambio di base" rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ e' $S = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Dunque la matrice B associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e':

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S$$

Calcoliamo S^{-1} con la riduzione di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}+2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}-3\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)\cdot \mathrm{II}]{(-1)\cdot \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Quindi $S^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calcolando si ottiene che:

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -26 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Un metodo alternativo più diretto è il seguente.

$$B = \left(T(v_1)_{\mathcal{B}} \;\middle|\; T(v_2)_{\mathcal{B}} \right)$$ dove $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ sono i vettori della base $\mathcal{B}$

e $T(v_1)_{\mathcal{B}}$ e $T(v_2)_{\mathcal{B}}$ sono le coordinate di $T(v_1)$ e $T(v_2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$T(v_1) = T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(v_2) = T\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -19 \end{pmatrix}$$

Calcoliamone le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$:

$$T(v_1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 9 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 = -7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 9 \\ -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -7 \\ 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+2\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 3\lambda_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow -\lambda_1 - 15 = -7 \Rightarrow \lambda_1 = -8$$

Quindi sistema ridotto è $\left\{ \quad -\lambda_2 = -5 \Rightarrow \lambda_2 = 5 \right.$

e perciò $T(v_1)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$T(v_2) = \begin{pmatrix} 23 \\ -19 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 23 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 = -19 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 23 \\ -1 & -3 & -19 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I e II}]{\text{scambio}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -19 \\ 2 & 5 & 23 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}+2\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -19 \\ 0 & -1 & -15 \end{array}\right)$$

Quindi il sistema ridotto è $\begin{cases} -\lambda_1 - 3\lambda_2 = -19 \Rightarrow -\lambda_1 - 45 = -19 \Rightarrow \lambda_1 = -26 \\ \quad -\lambda_2 = -15 \Rightarrow \lambda_2 = 15 \end{cases}$

e perciò $T(v_2)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 23 \\ -19 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \end{pmatrix}$ e possiamo concludere che

$$B = \left(T(v_1)_{\mathcal{B}} \,\middle|\, T(v_2)_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} -8 & -26 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

—//—

<u>Esercizio 2</u>

$$\begin{cases} x_1 \quad + k x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = k-1 \\ x_1 + k x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&k&1\\-1&1&-1&k-1\\1&k&1&2\end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II+I} \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&k&1\\0&1&k-1&k\\0&k&1-k&1\end{array}\right)\xrightarrow{III-kII}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&k&1\\0&1&k-1&k\\0&0&1-k^2&1-k^2\end{array}\right)$$

$$1-k-k(k-1) = 1-\cancel{k}-k^2+\cancel{k}$$

- Se $1-k^2\neq 0$, cioè se $k\neq 1$ e $k\neq -1$ allora ci sono 3 pivot e quindi il sistema ammette ed unica soluzione

- Se $k=1$ al termine della riduzione ottengo una riga di zeri, quindi il sistema è risolubile.

$$\begin{array}{ccc|c}\begin{array}{c}\\\\\\\end{array} & & & \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc}P&P&L\end{array}$$

x_3 variabile libera

Cerchiamo la soluzione speciale:

$$\begin{cases}x_1 + x_3 = 0\\ x_2 = 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x_1+1=0 \Rightarrow x_1=-1\\ x_2=0\end{cases} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

soluzione speciale

Poniamo $x_3=1$

Una soluzione particolare si trova ponendo le var. libera $x_3=0$

$$\begin{cases}x_1+0=1\\ x_2=1\end{cases} \qquad \vec{x}_p = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Quindi si ottiene il seguente insieme infinito di soluzioni:

$$\mathcal{S} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Se $k=-1$, al termine della riduzione ottengo una riga di zeri, quindi il sistema è risolubile.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

x_3 è variabile libera.

Quindi abbiamo infinite soluzioni.

Anche se non richiesto dall'esercizio, troviamole.

SOLUZ. SPECIALE $x_3=1$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \end{matrix} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troviamo una soluzione particolare ponendo $x_3=0$

$$\begin{cases} x_1 - 0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 - 0 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases} \qquad \vec{x_p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni è $\mathcal{S} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

—//—

Esercizio 3

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$ Il polinomio caratteristico e'

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1-\lambda)(-1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 \cdot [(1-\lambda)(-1-\lambda)-3] =$$

$$= (\lambda+1)^2(-1-\lambda+\lambda+\lambda^2-3) = (\lambda+1)^2(\lambda^2-4) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+2)$$

Gli autovalori sono:

$\lambda=-1$ molt. alg. 2 ; $\lambda=2$ molt. alg. 1 ; $\lambda=-2$ molt. alg. 1 .

$\underline{\lambda=-1}$ $\quad Aut.(-1) = \ker(A+I)$

$$A+I=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-2&-4&2&-1\\1&4&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{I e IV}]{\text{scambio}}\begin{pmatrix}1&4&-3&0\\0&0&0&0\\-2&-4&2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{III}+2\text{I}}\begin{pmatrix}1&4&-3&0\\0&0&0&0\\0&4&-4&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{II e III}]{\text{scambio}}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&4&-3&0\\0&4&-4&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}P&P&L&L\end{matrix}\end{array}$$

x_3 e x_4 sono le due variabili libere. Quindi $Aut_A(-1)$ ha dimensione 2 e $\lambda=-1$ ha molt. geometrica 2.

Troviamo le soluzioni speciali:

$$\begin{matrix}x_3=1\\x_4=0\end{matrix}\quad\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3=0 \Rightarrow x_1+4-3=0 \Rightarrow x_1=-1\\ 4x_2-4x_3-x_4=0 \Rightarrow 4x_2-4=0 \Rightarrow x_2=1\end{cases}\qquad \vec{s}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}x_3=0\\x_4=1\end{matrix}\quad\begin{cases}x_1+4x_2-3x_3=0 \Rightarrow x_1+1-0=0 \Rightarrow x_1=-1\\ 4x_2-4x_3-x_4=0 \Rightarrow 4x_2-1=0 \Rightarrow x_2=1/4\end{cases}\qquad \vec{s}_2=\begin{pmatrix}-1\\1/4\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda=2}$ $\qquad Aut_A(2)=\ker(A-2I)$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-3&0&0\\-2&-4&-1&-1\\ \end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot \text{I}}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-3&0&0\\-2&-4&-1&-1\\ \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{III}-2\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2 & -4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad IV + I$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3} II} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+4II]{III-4II} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-3III} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_4 è la variabile libera. Quindi $Aut_A(2)$ ha dimensione 1, e $\lambda = 2$ ha molt. geom. 1.

Troviamo la soluzione speciale:

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow -x_3 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = -1 \end{cases} \qquad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda = -2}$ $\quad Aut_A(-2) = \ker(A + 2I)$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-I]{III+2I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-4II]{III+4II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV+III} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

x_4 e' la variabile libera, quindi $Aut_A(-2)$ ha dimensione 1 e $\lambda=-2$ ha molt. geom. 1.

Troviamo la soluzione speciale:

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} x_1 = 0 & \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ 3x_3 - x_4 = 0 & \Rightarrow 3x_3 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\vec{S}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A e' diagonalizzabile perche' ha una base di autovettori, cioe' $\mathcal{B} = \{\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4\}$.

La matrice "cambio di base" $S = \left(\vec{S}_1 \,\vdots\, \vec{S}_2 \,\vdots\, \vec{S}_3 \,\vdots\, \vec{S}_4 \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e' tale che $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e' diagonale.

Esercizio 4

(1.) Possiamo imporre $A \cdot v_1 = 2 \cdot v_1$; $A \cdot v_2 = 2 \cdot v_2$; $A \cdot v_3 = -v_3$

Notiamo che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e' una base di autovettori.

Per verificare che e' una base basta notare che la matrice "cambio di base" $S = \left(\vec{v}_1 \middle| \vec{v}_2 \middle| \vec{v}_3 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e' invertibile

perché $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot (5-6) = -1 \neq 0$.

Abbiamo che $S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e quindi possiamo

calcolare $A = S \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot S^{-1} = \underset{\text{(calcoli)}}{\dots} = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ -30 & 0 & 17 \end{pmatrix}$

(2.) Se B 2x2 corrisponde ad una applicazione lineare NON suriettiva allora tale appl. lineare NON è neanche iniettiva.

(Ricordiamo che questa proprietà vale per tutte le appl. lineari $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ da uno spazio euclideo in se stesso)

Ma allora $\ker(B) \neq \{0\}$ e quindi $\lambda = 0$ è autovalore di B.

Se anche $\lambda = 1$ è autovalore, allora B ha 2 autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

(Ricordiamo che se una matrice A $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile)

Quindi le 3 proprietà richieste non possono essere soddisfatte da alcuna matrice B 2×2.