Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 13 Giugno 2022

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dove

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ -2x+y \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice A associata ad f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

La matrice associata ad f rispetto alla base canonica e'

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice "cambio di base"

e' $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice B associata

ad f rispetto alla base $\mathcal{B}$ si calcola usando la

formula $B = S^{-1} A S$.

Col metodo di Gauss-Jordan, calcoliamo S^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot II]{3\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{3\cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{I-II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[1/3\cdot II]{1/6\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{S^{-1}}$$

$$B = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\text{calcoli}}{\dots} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. [8 pt.]

Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Descrivere l'insieme $\mathcal{S}$ di tutte le soluzioni del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+3\text{II}}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} P & P & L \end{array} \end{array}$$

Il sistema è risolubile.
C'è una variabile libera, cioè x_3.

$x_3 = 1$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow 2x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la soluzione speciale.

Possiamo trovare una soluzione particolare ponendo $x_3 = 0$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\vec{s}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque $\mathcal{S} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Esercizio 3. [10pt.]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.

2. Per ognuno degli autovalori, determinare la sua molteplicità geometrica e trovare una base del relativo autospazio.

3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

1. $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$ sviluppo lungo la II colonna

$(-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo lungo la II colonna)

$= (-1-\lambda)(-1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)^2 \left[(1-\lambda)(-2-\lambda)+2\right]$

$= (\lambda+1)^2(\cancel{-2} - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 + \cancel{2}) = (\lambda+1)^2(\lambda^2+\lambda) = \lambda(\lambda+1)^3$

$\lambda = 0$ è autovalore di m.a. $= 1$

$\lambda = -1$ è autovalore di m.g. $= 3$

Scansionato con CamScanner

(2) $\lambda = -1$ $\quad Aut_A(-1) = \ker(A+I)$

$$A+I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+\mathrm{I}]{\substack{\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & L & L \end{array} \end{array}$$

Tre variabili libere $\Rightarrow$ m.g. $= \dim(\ker(A+I)) = 3$

Visto che $\lambda = 0$ ha m.a $= 1$, e quindi m.g. $= 1$,

possiamo già concludere che A è diagonalizzabile.

Troviamo basi per gli autospazi.

$\underline{\lambda = -1}$ $\quad A+I \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Visto che la seconda e la terza colonna sono formate da zeri;

$(A+I) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $(A+I) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Inoltre la I colonna $- 2 \cdot$ II colonna $= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e quindi

$(A+I) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

In questo modo, senza ulteriori calcoli, abbiamo trovato una base per $Aut_A(-1)$, cioè

$$\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\underline{\lambda = 0}$ $$A - 0 \cdot I = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III-4I \\ IV+2I}]{II-4I} \begin{array}{cccc} & & & \\ \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

x_4 è la variabile libera

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ -x_2 - 2x_4 = 0 & \Rightarrow -x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \\ -x_3 - 2x_4 = 0 & \Rightarrow -x_3 - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \end{cases}$$

Dunque $Aut_A(0)$ ha come base $\left\{ \underset{v_4}{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

3

$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di autovettori.

Se prendiamo la matrice "cambio di base" $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ si ottiene che

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4 [punti 6]

1. Determinare una matrice 3×3 che ha il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come autovettore di autovalore $\lambda = 3$.

2. Esiste una matrice A di dimensioni 3×3 (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti tre proprietà?
   - L'applicazione lineare associata non è suriettiva.
   - $\lambda = 1$ è autovalore.
   - A non è diagonalizzabile.

   Se la risposta è NO, spiegare perché. Se la risposta è SI, trovare un esempio.

(1) Se $A = \left(w_1 \middle| w_2 \middle| w_3 \right)$, abbiamo

$A \cdot v = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1$. Affinché v sia autovettore di autovalore $\lambda = 3$ occorre e basta che $A \cdot v = w_1 = 3 \cdot v$.

Dunque ogni matrice A 3×3 la cui prima colonna è $w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa la proprietà richiesta.

(2)

Se A corrisponde ad una appl. lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ NON suriettiva allora necessariamente A ha una variabile libera, dunque $\ker f \neq \{0\}$ e $\lambda = 0$ e' autovalore di f.

Assumendo che anche $\lambda = 1$ sia autovalore la matrice A non puo' avere un terzo autovalore $\lambda \neq 0, 1$, altrimenti sarebbe diagonalizzabile.

(Ricordare che una matrice $n \times n$ con n autovalori distinti e' diagonalizzabile).

Un modo per avere A non diagonalizzabile e' ad esempio avere $\lambda = 0$ con m.a. $= 2$ e m.g. $= 1$. Ecco un esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda)$$