Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 12 Settembre 2022

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione:

$$z^2 - \overline{z} = 0$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione:

$$e^z + 1 = 0$$

1. $z^2 = \overline{z}$

In coordinate polari $z \to (\rho, \theta) \Rightarrow \overline{z} \to (\rho, -\theta)$

$z^2 \to (\rho^2, 2\theta)$

Dunque $\begin{cases} \rho^2 = \rho \\ 2\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \rho = 0, 1$

$\rho = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ e' soluzione.

$\rho = 1$, $3\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ (poi si ripete)

$z_1 = (1, 0) = 1$; $z_2 = (1, 2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

$z_3 = (1, 4\pi/3) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

② $e^z + 1 = 0 \iff e^z = -1$

$z = a + ib$

$e^z = e^a(\cos b + i \sin b) = \underbrace{(e^a, b)}_{\text{coordinate polari}}$

$-1 = \underbrace{(1, \pi)}_{\text{coordinate polari}}$

Dunque $\begin{cases} e^a = 1 \Rightarrow a = 0 \\ b = \pi + 2k\pi \end{cases}$

Ci sono infinite soluzioni:

$$z = (\pi + 2k\pi)i \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 2. [8 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 \\ -2x_2 - 8x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

1. Trovare una base del nucleo di T.
2. Trovare una base dell'immagine di T.
3. Determinare l'insieme:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \; : \; T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice associata e':

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-2I} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & -8 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+2II}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & P \end{array} \end{array}$$ Matrice ridotta

① x_3 e' variabile libera. Troviamo la soluzione speciale.

$$x_3 = 1 \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 12 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -11 \\ x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 + 4 - 0 = 0 \Rightarrow x_2 = -4 \\ -x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

Dunque

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ è l'unica soluzione speciale e

$\mathcal{B} = \{ \vec{s} \}$ è una base di ker T.

② Le colonne I, II e IV sono pivot, dunque una base dell'Immagine di T è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

③ Troviamo una soluzione particolare, ad esempio ponendo la variabile libera $x_3 = 0$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_4 = 3 \\ -2x_2 + 5x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{II - I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{III + 2II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 1 & \Rightarrow x_1 = 4 \\ x_2 - 3x_4 = 1 & \Rightarrow x_2 = 1 \\ -x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Concludiamo che l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni e'

$$\mathcal{S} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

(1) Il polinomio caratteristico e'

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$ (sviluppo lungo la III riga)

$$(1-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{sviluppo lungo la III riga}}{=} (1-\lambda)(-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-2-\lambda)\cdot\left[(-\lambda)(1-\lambda) - 0\right] = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

Gli autovalori sono:

$\lambda = 0$ molt. alg. 1

$\lambda = 1$ molt. alg. 2

$\lambda = -2$ molt. alg. 1

(2) $\lambda = 0$

$$\mathrm{Aut}(A,0) = \ker(A - 0I) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \longleftrightarrow \text{II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{II}]{\text{III}+\text{II}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & P \end{matrix} \end{array}$$

x_2 variabile libera. Troviamo la soluz. speciale ponendo $x_2 = 1$.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 0 & \Rightarrow -2x_1 + 1 - 0 + 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ -x_3 + x_4 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$ è una base di $\mathrm{Aut}(A,0)$

$\underline{\lambda = 1}$ $\qquad \mathrm{Aut}(A, 1) = \ker(A - I)$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[II \leftrightarrow IV]{\text{scambio}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \leftrightarrow IV]{\text{scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & P & P \end{matrix} \end{array}$$

C'è una sola variabile libera x_2, quindi

una base di $\mathrm{Aut}(A, 1) = \ker(A - I)$ contiene

un solo vettore, dato dalla soluzione speciale.

$$\underline{x_2 = 1} \qquad \begin{cases} -x_1 - x_3 + x_4 = 0 & \Rightarrow -x_1 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_3 - 3x_4 = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \\ 4x_4 = 0 & \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathrm{Aut}(A, 1)$

Notiamo che la seconda colonna di $A - I$ è formata da zeri,

quindi potevamo subito osservare senza bisogno di

calcoli che $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A - I)$.

$\underline{\lambda = -2}$ $\qquad \text{Aut}(A, -2) = \ker(A + 2I)$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - \frac{1}{3} III}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

La variabile libera e' x_4.

Troviamo la soluzione speciale.

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} 2x_1 \quad - x_3 + x_4 = 0 & \Rightarrow 2x_1 - 0 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \\ 3x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0 & \Rightarrow 3x_2 - 0 + 7 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{3} \\ 3x_3 \quad = 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ e' una base di $\text{Aut}(A, -2)$

(3) La matrice A <u>NON</u> e' diagonalizzabile perche' l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicita' algebrica 2, ma molteplicita' geometrica 1

Esercizio 4 [punti 6]

1. Esistono matrici 3×3 con la prima colonna di zeri e tali che $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sia autovettore di autovalore $\lambda = -1$?

   [In caso di risposta positiva, mostrare un esempio; altrimenti motivare la risposta negativa.]

2. Trovare una matrice A di dimensioni 3×3 (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti proprietà:

   - $\lambda = -2$ è autovalore.
   - $det(A) = 0$.
   - A è *non* è diagonalizzabile.

① Se $A = \left(\vec{0} \,\middle|\, \vec{a}_1 \,\middle|\, \vec{b}_1 \right)$, allora $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \vec{0} + 2\vec{b} = 2\vec{b}$.

Quindi $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ autovettore di A di autovalore $\lambda = -1 \iff$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \iff 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \vec{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quindi $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 1/2 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & -1 \end{pmatrix}$ soddisfa le proprietà richieste, per ogni scelta di a_1, a_2, a_3.

(2) $\det(A) = 0 \iff$ A non invertibile $\iff$ $\ker A \neq \{0\} \iff \lambda = 0$ e' autovalore.

Visto che anche $\lambda = -2$ e' autovalore per avere la NON diagonalizzabilita' non può esserci un terzo autovalore diverso da 0 e -2.

Ad esempio, se A ha autovalore $\lambda = 0$ di m.a. 2 e $\lambda = -2$ di m.a. 1 ma $\lambda = 0$ ha m.g. = 1, la matrice NON e' diagonalizzabile. Un esempio e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infatti $P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$

$$= (-\lambda)(-2-\lambda)(-\lambda) = -\lambda^2(\lambda+2) \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 0 \quad m.a.\ 2 \\ \lambda = -2 \quad m.a.\ 1 \end{array}$$

Tuttavia $\ker(A - 0 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ha dimensione 1, e quindi m.g. di $\lambda = 0$ e' 1.

Infatti $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} L & P & P \end{matrix}$

ha un'unica variabile libera.