Soluzioni Scritto 09/01/2023

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Sia $z \in \mathbb{C}$ il numero complesso di coordinate polari $(\rho, \theta) = (3, \pi/3)$, e sia $w \in \mathbb{C}$ il numero complesso di coordinate polari $(\rho, \theta) = (9, \pi/6)$. Scrivere coordinate polari e coordinate cartesiane del seguente numero complesso, dove $\overline{w}$ denota il coniugato di w:
$$\frac{z^7}{(\overline{w})^3}$$
2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:
$$z^3 = 8.$$

Soluzione 1

Considerazioni preliminari:

- In coordinate polari (ρ, θ), l'angolo θ è nell'intervallo $\theta \in [0, 2\pi)$
- Se due angoli θ_1 e θ_2 sono equivalenti (cioè rappresentano lo stesso angolo) scriveremo $\theta_1 \approx \theta_2$

e NON $\theta_1 = \theta_2$, poiché sono numeri diversi

- In polari, $\frac{z_1}{z_2} \sim \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}, \underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{\text{sottraggo gli angoli}}\right)$ infatti se $z_1 \sim (\rho_1, \theta_1)$ allora $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 \sim (\rho_2, \theta_2)$ allora $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ $\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Abbiamo $z \sim \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, $w \sim \left(9, \frac{\pi}{6}\right)$ per cui: $z^7 \sim \left(3^7, \frac{7}{3}\pi\right)$, $\overline{w} \sim \left(9, -\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow (\overline{w})^3 \sim \left(9^3, -\frac{3}{6}\pi\right) = \left(3^6, -\frac{\pi}{2}\right)$

Dunque in polari $\frac{z^7}{(\overline{w})^3} \sim \left(\frac{3^{\cancel{7}}}{\cancel{3^6}}, \frac{7}{3}\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(3, \frac{7}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \left(3, \frac{17}{6}\pi\right)$

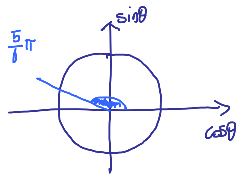
Tuttavia, $\frac{17}{6}\pi \notin [0, 2\pi)$, per cui cerco un suo angolo equivalente. Noto che $\frac{17}{6}\pi = \frac{12+5}{6}\pi = 2\pi + \frac{5}{6}\pi$,

ovvero $\frac{17}{6}\pi \approx \frac{5}{6}\pi \Rightarrow$ $\boxed{\text{in polari } \frac{z^7}{(\overline{w})^3} \sim \left(3, \frac{5}{6}\pi\right)}$

- Passare da polari (ρ, θ) a cartesiane $a + ib$:

se $z \sim (\rho, \theta)$ allora $z = \rho[\cos\theta + i\sin\theta]$ e sostituisco i valori di $\cos\theta$ e $\sin\theta$

So che $\frac{z^7}{(\overline{w})^3} \sim \left(3, \frac{5}{6}\pi\right) \Rightarrow \frac{z^7}{(\overline{w})^3} = 3\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]$



In cartesiane, $\boxed{\frac{z^7}{(\overline{w})^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{3}{2}}$

Osservazioni

- $z^7 \sim \left(3^7, \frac{7}{3}\pi\right)$, ma $\frac{7}{3}\pi \notin [0, 2\pi)$, tuttavia $\frac{7}{3}\pi = \frac{6+1}{3}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, cioè $\frac{7}{3}\pi \approx \frac{\pi}{3}$

per cui in polari $z^7 \sim \left(3^7, \frac{\pi}{3}\right)$.

Allora $\frac{z^7}{(\overline{w})^3} \sim \left(3, \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(3, \frac{5}{6}\pi\right)$ ok!

• Anche $(\bar{w})^3 \sim (3^6, -\frac{\pi}{2})$, ma $-\frac{\pi}{2} \notin [0, 2\pi)$, tuttavia $-\frac{\pi}{2} \approx \frac{3}{2}\pi$, per cui $(\bar{w})^3 \sim (3^6, \frac{3}{2}\pi)$

Allora $\frac{z^7}{(\bar{w})^3} \sim (3, \frac{\pi}{3} - \frac{3}{2}\pi) = (3, -\frac{7}{6}\pi)$ e $-\frac{7}{6}\pi \notin [0, 2\pi)$, tuttavia $-\frac{7}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi - 2\pi \Rightarrow$ sono equivalenti ok!

Oppure $\frac{z^7}{(\bar{w})^3} \sim (3, \frac{7}{3}\pi - \frac{3}{2}\pi) = (3, \frac{5}{6}\pi)$ ok!

Soluzione 1 (Alternativa)

Partivo dalle coordinate cartesiane:

$z^7 \sim (3^7, \frac{7}{3}\pi) \Rightarrow z^7 = 3^7\left[\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{3}\pi\right)\right] = 3^7\left[\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$(\bar{w})^3 \sim (3^6, -\frac{\pi}{2}) \Rightarrow (\bar{w})^3 = 3^6\left[\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1}\right] = -3^6 i$

Per cui $\frac{z^7}{(\bar{w})^3} = \frac{3^{\cancel{7}}\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]}{-\cancel{3^6}\, i} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{\frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{1}$ ok!

In cartesiane: $\boxed{\frac{z^7}{(\bar{w})^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{3}{2}}$

Passare da cartesiane a polari

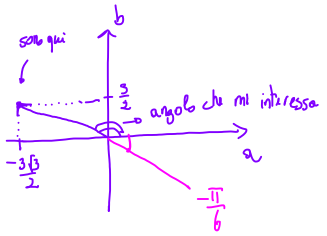
Se $z = a + ib$, allora $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)\ (\pm\pi)$

perché mi serve l'angolo "giusto" e dipende in che quadrante mi trovo

Nel nostro caso, $\frac{z^7}{(\bar{w})^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{3}{2}$ per cui $\rho = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3$

$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right) + \pi = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi$

$= -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi$



aggiungo $+\pi$ perché sono nel 2° quadrante

Infatti, se avessi preso $\theta = -\frac{\pi}{6}$, allora $\rho = 3$

e $\frac{z^7}{(\bar{w})^3} = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{3}{2}$

che non è la forma cartesiana da cui sono partito

In polari $\boxed{\rho = 3,\ \theta = \frac{5}{6}\pi}$

Soluzione 2: Risolvere $z^3 = 8$

In polari $z \sim (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 \sim (\rho^3, 3\theta)$ e $8 \sim (8, 0)$ per cui:

$(\rho^3, 3\theta) = (8, 0)$ e uguaglio: $\begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$ (due angoli polari sono uguali a meno di 2π) $k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \rho^3 = 2^3 \\ \theta = \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

• Se $k = 0$ ho: $z_0 \sim (2, 0) \Rightarrow z_0 = 2[\cos(0) + i\sin(0)] = \boxed{2}$

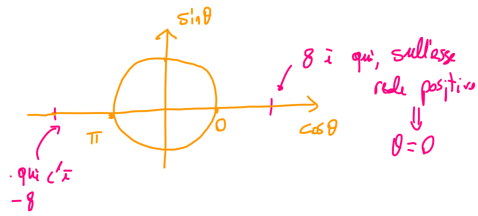
• Se $k = 1$ ho: $z_1 \sim (2, \frac{2}{3}\pi) \Rightarrow z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right] = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{-1 + i\sqrt{3}}$

• Se $k=2$ ho: $z_2 \sim \left(2, \frac{4}{3}\pi\right) \Rightarrow z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right] = \boxed{-1-i\sqrt{3}}$

• Se $k=3$ ho: $z_3 \sim (2, 2\pi) \Rightarrow z_3 = z_0 \rightsquigarrow$ per $k \geq 3$ si ripetono

Osservazioni

• 8 in polari è $(8,0)$ e NON $(8,\pi)$, infatti:



Se scrivo $(8,\pi)$ in cartesiane ho:

$8[\underbrace{\cos\pi}_{-1} + i\underbrace{\sin\pi}_{0}] = -8$ e NON 8!

• Numeri ben precisi hanno angoli ben precisi: $8 \sim (8,0)$ NON $(8, 2k\pi)$

[al più $(8, 2\pi)$]

Metto il $+2k\pi$ quando uguaglio angoli polari: $3\theta = 0 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 2. [8 pt.]
Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dove

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

1. Trovare una base del nucleo di T.
2. Trovare una base dell'immagine di T.
3. Determinare l'insieme:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Soluzione 1

Anzitutto, la matrice associata a T è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare una base del nucleo di T, $\mathrm{Ker}(T)$, risolvo il sistema omogeneo con matrice A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + 3I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III - 3I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + 2II} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} P & L & P & L \end{matrix}$$

Ho due variabili libere: x_2 e x_4, per cui $\dim(\mathrm{Ker}\,T) = 2$

A turno, pongo una variabile libera $= 1$ e l'altra $= 0$:

- $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

  trovo la soluzione: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 1 = 0 \\ -2x_3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$ ho la soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Allora $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \ \middle| \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

e una base è: $\boxed{\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

Soluzione 2:

Una base di $\mathrm{Im}(T) =$ immagine di T è data dalle colonne pivot della matrice A NON ridotta a scala.

Le colonne pivot sono la 1^a e la 3^a, per cui

$$\boxed{\mathcal{B}_{Im(T)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}}$$

Soluzione 3:

Devo risolvere $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, cioè:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ho già trovato le soluzioni speciali, che sono una base di $Ker(T)$:

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇝ cerco la soluzione particolare

Riduco con Gauss con le stesse mosse del punto 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} - 3\text{I}]{\text{II} + 3\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III} + 2\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dall'ultima riga otteniamo $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$, cioè $0 = 1$

dunque il sistema è impossibile

Per cui il sistema non ammette soluzioni $\Rightarrow$ $\boxed{S = \emptyset}$ ← insieme vuoto

OSS: • In un sistema impossibile, l'insieme delle soluzioni S ESISTE ed è VUOTO

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Soluzione 1

Calcoliamo il polinomio caratteristico di A: $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{sviluppo lungo} \\ \text{la I riga, perchè} \\ \text{ho 3 zeri}}}{=} (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{sviluppo lungo} \\ \text{la III riga}}}{=} (1-\lambda)(3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2\cdot 4\right]$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)\left[-1-\cancel{\lambda}+\cancel{\lambda}+\lambda^2-8\right]$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda)(\lambda^2-9)$$

$\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$ $\Leftarrow\!\!=$ $(1-\lambda)(3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3)$

$(3-\lambda) = -1\cdot(\lambda-3)$ $\Leftarrow\!\!=$ $(1-\lambda)\cdot(-1)\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-3)(\lambda+3)$

Cioè $P_A(\lambda) = -(1-\lambda)(\lambda-3)^2(\lambda+3)$

Gli autovalori di A sono le radici di $P_A(\lambda)$:

$P_A(\lambda)=0 \iff -(1-\lambda)(\lambda-3)^2(\lambda+3)=0 \iff$
$\lambda=1$ con $m_a(1)=1$
$\lambda=3$ con $m_a(3)=2$
$\lambda=-3$ con $m_a(-3)=1$

- Osservazioni

1) A è matrice 4x4, per cui $P_A(\lambda)$ DEVE avere grado 4
2) Gli autovalori di A sono tutti reali, quindi ne devo trovare ESATTAMENTE 4 (contati con molteplicità).
Cioè la somma delle m.a. deve fare 4 = taglia della matrice $\rightsquigarrow$ $1+2+1=4$ ok!

Se una di queste due condizioni salta, allora ho sbagliato a calcolare $P_A(\lambda)$

Soluzione 2 :

Ricordo che se λ è autovalore di A, il suo autospazio è $Aut_A(\lambda) = Ker(A-\lambda I)$
e per trovarne una base, risolvo il sist. omogeneo con matrice $A-\lambda I$

- $\boxed{\lambda=1}$

$Aut_A(1) = Ker(A-1\cdot I) \rightsquigarrow A-I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow IV} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{II}{2}]{\frac{I}{2}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2II - I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & p & L \end{matrix} \end{array}$$

ho 1 variabile libera, x_4.

Sol. speciale: $x_4 = 1 \rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 1 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 + 1 = 0 \\ -2x_3 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = v_1$

autovettore relativo a $\lambda = 1$

$$Aut_A(1) = Span(v_1) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

una base è $\mathcal{B}_{Aut(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. In particolare, $mg(1) = 1 = ma(1)$

- $\boxed{\lambda = 3}$

$Aut_A(3) = Ker(A - 3I)$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - 2I} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - I} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III + 2II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & L & L \end{matrix} \end{array}$$

ho due variabili libere, x_3 e x_4

$\Rightarrow mg(3) = dim(Aut_A(3)) = 2$

Sol spec con $\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

autovettori relativi a $\lambda = 3$

sol. speciale con $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ -2x_2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightsquigarrow w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_{Aut_A(3)} = \{ v_3, w_3 \}$, inoltre $mg(3) = 2 = ma(3)$

- $\boxed{\lambda = -3}$

$Aut_A(-3) = Ker(A - (-3)I) = Ker(A + 3I)$

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + I} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{II}{2}]{\frac{I}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - 2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III+2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad$ P P L P

ho 1 var. libera $x_3 \Rightarrow mg(-3) = 1$

Sol. spec. con $x_3 = 1 \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 + 1 + x_4 = 0 \\ -3x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = 0 \end{cases} \to V_{-3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ autovettore relativo a $\lambda = -3$

$\mathcal{B}_{Aut_A(-3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ed inoltre $mg(-3) = 1 = ma(-3)$

Osservazioni:

- La dimensione degli autospazi è SEMPRE ≥ 1, per cui devo sempre trovare almeno 1 var. libera.

Se trovo 4 pivots, c'è qualche problema (o ho sbagliato a ridurre, o ho sbagliato a trovare $P_A(\lambda)$)

Soluzione 3:

A è diagonalizzabile in quanto tutti i suoi autovalori sono reali e ogni autovalore ha la molteplicità algebrica uguale a quella geometrica.

Esistono allora una matrice invertibile S e una diagonale D 4x4 tali che

$S^{-1}AS = D$, con: $\quad S$ = matrice che ha per colonne gli autovettori trovati

$$S = \left(v_1 | v_3 | w_3 | v_{-3} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$

Esercizio 4 [punti 7]

1. Trovare il vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che:

(i) • La sua seconda coordinata è uguale -2.
(ii) • $w \in \text{span}\{(1,-3,2),(0,-1,2)\}$
(iii) • Il prodotto scalare tra w e $(1,1,0)$ è uguale a -1.

2. Trovare una matrice A di dimensioni 3×3 (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti proprietà:

I • $A \cdot (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3$.
II • $A \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$.
III • $A \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

[Con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sono denotati i tre vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.]

Soluzione 1

Cerco $w \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Da (i) so che $b_2 = -2 \Rightarrow w = \begin{pmatrix} b_1 \\ -2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Da (iii) so che $w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$, cioè: $\begin{pmatrix} b_1 \\ -2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{b_1 - 2 = -1}$

ovvero $b_1 = 1$

$\Rightarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Da (ii) so che ha sol. il sistema $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ -3 & -1 & b_2 \\ 2 & 2 & b_3 \end{array}\right)$ cioè

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{II+3I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{III-2I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & b_3-2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III+2II} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & b_3 \cancel{-2+2} \end{array}\right)$$

voglio che abbia soluzione, cioè: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ -x_2 = 1 \\ \boxed{0 = b_3} \end{cases}$

Dunque $\boxed{w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}$

• Soluzione 2

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notiamo che fare $A \cdot e_1$ = prima colonna di A, infatti:

A è 3×3, per cui $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{3\times\cancel{3}}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}} \cdot \underset{\cancel{3}\times1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{\text{prodotto righe per colonne}}{=} \underset{\text{prima colonna di } A}{\overset{3\times1}{\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}}}$

Allo stesso modo, $A \cdot e_2 = 2^a$ colonna di A

$A \cdot e_3 = 3^a$ colonna di A

Dalla III condizione abbiamo che: $A \cdot e_2 = e_1 + e_3$, cioè

2^a colonna di $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{2^a \text{ colonna di } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Dalla II condizione: $A(e_2 - e_3) = e_2$, cioè:

$$Ae_2 - Ae_3 = e_2$$

ma $Ae_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - Ae_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

per cui:

$$Ae_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Cioè $Ae_3 = \boxed{3^a \text{ colonna di } A = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}$

Dalla I condizione: $A(e_1 - e_2) = e_3$, cioè: $Ae_1 - Ae_2 = e_3$, ovvero:

$Ae_1 - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, da cui:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{prima colonna di } A = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{Quindi } A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & -1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}}$

Soluzione 2 (Alternativa)

I) $A(e_1 - e_2) = e_3$

II) $A(e_2 - e_3) = e_2$

III) $Ae_2 = e_1 + e_3$

Scrivo $A = \begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}$ e imponendo le condizioni

• Dalla III ottengo: $\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ovvero $\begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}b=1\\e=0\\h=1\end{cases}$

da cui: $A = \begin{pmatrix}a & 1 & c\\d & 0 & f\\g & 1 & i\end{pmatrix}$

• Dalla II ottengo: $\begin{pmatrix}a & 1 & c\\d & 0 & f\\g & 1 & i\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix}a & 1 & c\\d & 0 & f\\g & 1 & i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

ovvero: $\begin{pmatrix}1-c\\-f\\1-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}1-c=0\\-f=1\\1-i=0\end{cases} \to \begin{cases}c=1\\f=-1\\i=1\end{cases} \to A = \begin{pmatrix}a & 1 & 1\\d & 0 & -1\\g & 1 & 1\end{pmatrix}$

• Infine, dalla I $\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\d & 0 & -1\\g & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix}a & 1 & 1\\d & 0 & -1\\g & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ottengo:

$\begin{pmatrix}a-1\\d\\g-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a-1=0\\d=0\\g-1=1\end{cases} \to \begin{cases}a=1\\d=0\\g=2\end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & -1\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}}$