Esercizio 1

1) Determinare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione

$$z^3 = i$$

Svolgimento:

In coordinate polari, $z \sim (\rho, \theta)$, per cui $z^3 \sim (\rho^3, 3\theta)$, mentre $i \sim (1, \frac{\pi}{2})$

Allora in polari devo risolvere:

$$(\rho^3, 3\theta) = (1, \tfrac{\pi}{2}) \text{, ovvero:}$$

$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases} \text{, con } k \in \mathbb{Z}$$

- per $k=0$, ho: $z_0 \sim (1, \frac{\pi}{6}) \Rightarrow z_0 = 1 \cdot [\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6})] = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}}$

- per $k=1$, ho: $z_1 \sim (1, \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi) = (1, \frac{5}{6}\pi) \Rightarrow \boxed{z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}}$

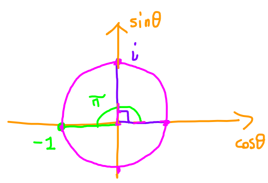
- per $k=2$, ho: $z_2 \sim (1, \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi) = (1, \frac{9}{6}\pi) = (1, \frac{3}{2}\pi) \Rightarrow \boxed{z_2 = -i}$

- per $k=3$, ho: $z_3 \sim (1, \frac{\pi}{6} + 2k\pi)$, cioè $z_3 = z_0$, quindi da $k=3$ le soluzioni si ripetono

<u>OSS</u>: • Ricordiamo che se in polare $z \sim (\rho, \theta)$, allora in cartesiane:

$$z = \rho [\cos\theta + i \sin\theta]$$

•



al numero complesso $\boxed{i}$ corrisponde l'angolo $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$ e NON $\theta = \pi$, come molti hanno scritto.

Infatti il numero polare $(1, \pi)$ corrisponde a:

$$1 \cdot [\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + i \underbrace{\sin\pi}_{=0}] = \boxed{-1}$$

2) Determinare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione:

$$e^{3z} = e^{\bar{z}}$$

Svolgimento:

Scrivo z in cartesiana: $z = a+ib$ con a, b numeri reali.

Allora: $3z = 3a + 3ib$, dunque l'equazione diventa:

$\bar{z} = a - ib$

$$e^{3a+3ib} = e^{a-ib}$$

Per la proprietà delle potenze: $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ ho:

$$e^{3a} \cdot e^{3ib} = e^{a} \cdot e^{-ib}$$

Ricordiamo che, in forma polare, se $z \sim (\rho, \theta)$, allora $z = \rho e^{i\theta}$.

Nel nostro caso:

$$\underbrace{\boxed{e^{3a}}}_{\rho_1} \cdot e^{\overbrace{\boxed{3ib}}^{i\theta_1}} = \underbrace{\boxed{e^{a}}}_{\rho_2} \cdot e^{\overbrace{\boxed{-ib}}^{i\theta_2}}$$

ovvero in polari: $(e^{3a}, 3b) = (e^{a}, -b)$ ed uguagliando:

$$\begin{cases} e^{3a} = e^{a} \\ 3b = -b + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = a \\ 4b = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = k\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Poichè io cercavo le soluzioni $z = a+ib$, ho trovato $\begin{cases} a = 0 \\ b = k\frac{\pi}{2}, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$, ovvero

$$S = \left\{ z = 0 + i \cdot k\frac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$ e sono infinite soluzioni, una per ogni k

Ad esempio, se $k = 0$, ho $z_0 = 0 + i \cdot 0 = 0$

se $k = 1$, ho $z_1 = i \cdot \frac{\pi}{2}$ → sono tutte diverse e NON si ripetono

se $k = 2$, ho $z_2 = i \cdot \pi$

etc...

OSS • Poichè stiamo lavorando con i numeri complessi (e NON solo reali), non è vero che:

$e^{3z} = e^{\bar{z}} \Leftrightarrow \ln(e^{3z}) = \ln(e^{\bar{z}}) \overset{\text{NO}}{\Leftrightarrow} 3z = \bar{z}$, poichè su $\mathbb{C}$ logaritmo ed esponenziale

NON SONO INIETTIVI (come invece su $\mathbb{R}$). Basta pensare che $e^{i\pi} = -1 = e^{3i\pi}$, nonostante $i\pi \neq 3i\pi$

• Moltissimi, nonostante abbiano trovato a e b correttamente, hanno poi sostituito in e^{z},

scrivendo: $e^{z} = e^{a+ib} = e^{0+ik\frac{\pi}{2}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ da cui, per $k=0$ ottengo $e^{0} = 1$

per $k = 1$ ottengo $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

per $k=2$ ottengo $e^{i\pi} = -1$

tuttavia noi $\boxed{\text{NON CERCAVAMO } e^{z}, \text{ MA SOLO } z = a+ib}$ per $k=3$ ottengo $e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$

e poi si ripetono da $k = 4$ ...

Esercizio 2. [8 pt.]

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Trovare una base di V e una base di W.
2. Trovare una base di $V + W$.
3. Trovare una base di $V \cap W$.

Svolgimento

1) Troviamo una base di V: mettiamo i vettori di V come colonne di una matrice:

$$\begin{array}{ccc} p & p & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ e riduciamo con Gauss } \xrightarrow[\text{III} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{II} + 3\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} p & p & L \end{array}$$

Una base di V è data dalle colonne pivot della matrice NON RIDOTTA

$$\boxed{\mathcal{B}_V = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

- In maniera analoga, troviamo una base di W:

$$\begin{array}{ccc} p & p & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} - 3\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{II} + \text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} p & p & L \end{array}$$

Una base di W è data dalle colonne pivot della matrice NON RIDOTTA

$$\boxed{\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

2) Per trovare una base di $V + W$, consideriamo l'unione delle basi di V e W:

$$\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W = \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_V}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_W} \Bigg\}.$$

Considero la matrice che li ha come colonne e riduco con Gauss:

$$\begin{array}{cccc} p & p & p & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} + 3\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} - \text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV + III} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} p & p & p & L \end{matrix}$$

Una base di $V+W$ è data dalle colonne pivot della matrice NON RIDOTTA.

$$\boxed{\mathcal{B}_{V+W} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}}$$

3) Cerchiamo ora una base di $V \cap W$. Ripartiamo dalla matrice associata a $\mathcal{B}_V \cup \mathcal{B}_W$:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(stesse riduzioni di prima)}]{\text{Gauss}} C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} p & p & p & L \end{matrix}$$

e ne cerco la soluzione:

La variabile libera è $x_4 \leadsto$ sol. speciale con $x_4 = 1 \to \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 1 = 0 \\ x_3 + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

$\to$ sol del sist. omogeneo con matrice associata C: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Questo significa che $v \in \ker(C)$, cioè $C \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè: $\underbrace{1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_V} \underbrace{- 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_W} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

da cui: $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_V} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}_W}$ ottenendo $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Infatti, io cerco i vettori $w \in V \cap W$, cioè tali per cui w si scrive sia come combinazione lineare di elementi della base di V: $w = x_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sia w si scrive come combinazione lineare di elementi della base di W: $w = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cioè cerco x_1, x_2, x_3, x_4 per cui: $x_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Abbiamo allora trovato che: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero il vettore

$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \in V \cap W$, ed è l'unico possibile $\Rightarrow \mathcal{B}_{V \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

Alternativa 1: cerco $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in V \cap W$.

• $w \in V$, cioè ha sol il sistema: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 3 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & b_4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riduco}} \begin{cases} b_3 = 0 \\ b_4 - b_2 - 3b_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 0 \\ b_4 = b_2 + 3b_1 \end{cases}$

ovvero $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_2 + 3b_1 \end{pmatrix}$

• $w \in W$, cioè ha sol il sistema: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & b_2 + 3b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riduco}} \begin{cases} b_2 = 0 \\ b_2 + 3b_1 - 3b_1 = 0 \end{cases}$

ovvero $\begin{cases} b_2 = 0 \\ b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow w = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 3b_1 \end{pmatrix}$, prendendo la soluzione speciale con $b_1 = 1$

ho: $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e quindi $\mathcal{B}_{V \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Alternativa 2:

Un vettore $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in V \cap W$ se e solo se $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in V$ e $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in W$, ovvero:

• $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in V$ solo se ha sol il sistema: $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 3 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & b_4 \end{array}\right) \xrightarrow[IV \leftrightarrow III]{II + 3I} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 + 3b_1 \\ 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & b_3 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 + 3b_1 \\ 0 & 0 & b_4 - b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & b_3 \end{array}\right) \to \begin{cases} b_4 - b_2 - 3b_1 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$

• $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in W$ se e solo se ha soluzione il sistema $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \\ -3 & 0 & b_4 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[IV - 3I]{III - II} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 \\ 0 & 0 & b_4 - 3b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{II - I} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - b_2 \\ 0 & 0 & b_4 - 3b_1 \end{array}\right) \to \begin{cases} b_3 - b_2 = 0 \\ b_4 - 3b_1 = 0 \end{cases}$

Ovvero ho il sistema: $\begin{cases} -3b_1 - b_2 + b_4 = 0 \\ b_3 = 0 \\ -b_2 + b_3 = 0 \\ -3b_1 + b_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{matrice}} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{III} - \text{I}} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} + \text{II}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{IV} - \text{III}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} p & p & p & L \end{matrix}$$

Sol. speciale con $b_4 = 1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} -3b_1 + b_2 + 1 = 0 \\ -b_2 + b_3 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{3} \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ovvero $\boxed{\mathcal{B}_{V \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

OSS: • Conoscendo una base di $V+W$, possiamo usare il teorema di Grassmann per fare un controllo su $V \cap W$:

$$\left. \begin{aligned} \dim(V+W) &= \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) \\ 3 &= 2 + 2 - \dim(V \cap W) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dim(V \cap W) = 1$$

Ovvero mi aspetto una base fatta da un solo vettore (come abbiamo trovato)

• Abbiamo trovato 3 vettori di base di $V \cap W$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Questi 3 vettori DANNO LA STESSA BASE, perché sono uno multiplo dell'altro:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

, cioè $\operatorname{Span}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Svolgimento:

1) Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Sviluppiamo (ad esempio) lungo la II colonna (poiché ha 3 zeri):

$$= (1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{Sviluppo} \\ \text{lungo la III} \\ \text{colonna}}}{=} (1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot \left[(2-\lambda)(-1-\lambda)+2 \right] = (1-\lambda)^2 \cdot \left[\cancel{-2} - \lambda + \lambda^2 \cancel{+2} \right]$$

$$\boxed{P_A(\lambda) = -\lambda \cdot (1-\lambda)^3}$$

Dunque gli autovalori di A sono:
- $\lambda = 0$ con $m_a(0) = 1$
- $\lambda = 1$ con $m_a(1) = 3$

OSS: • Nel primo sviluppo di $P_A(\lambda)$, potevo sviluppare anche secondo la IV colonna (ha sempre 3 zeri e un unico elemento $\neq 0$)

• E se sviluppo lungo una riga/colonna che ha 2 (o più) elementi $\neq 0$?
Tipo se sviluppo lungo la I riga?

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{\substack{\text{det della matrice che si ottiene} \\ \text{eliminando la riga e la} \\ \text{colonna di } 2-\lambda}} + (-1)\cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} -3 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}_{\substack{\text{det della matrice che si ottiene} \\ \text{eliminando la riga e la} \\ \text{colonna di } -1}}$$

$= \text{conti} = -\lambda(1-\lambda)^3$ DEVE VENIRE SEMPRE UGUALE, A PRESCINDERE DALLA RIGA/COLONNA SCELTA PER SVILUPPARE

2) Ricordiamo che se λ è autovalore di A, allora $Aut_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$, quindi una base di $Aut_\lambda(A)$ si trova risolvendo il sistema omogeneo con matrice associata $A - \lambda I$

• $\underline{\lambda = 0}$ $\rightarrow$ $Aut_A(0) = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker A$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV + II]{III - I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[III \leftrightarrow IV]{2II + 3I} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2III - II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & p & L \end{matrix} \end{array}$$

Var. libera: x_4 $\rightarrow$ sol. speciale con $x_4 = 1$ $\rightarrow$ $\begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_3 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = -1 \\ x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{v = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}$ autovettore relativo a $\lambda = 0$. Una base di $Aut_A(0)$ è $\mathcal{B}_{Aut_A(0)} = \{v\}$

• $\underline{\lambda = 1}$ $\rightarrow$ $Aut_A(1) = \ker(A - 1 \cdot I)$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - 2I]{IV + II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II + 3I} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & L & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Variabili libere: x_2, x_3, x_4.

Sol. spec. con $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \{x_1 = 0 \Rightarrow w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol. speciale con $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \{x_1 - 1 = 0 \Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol. speciale con $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \{x_1 = 0 \Rightarrow w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B}_{Aut_A(1)} = \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di $Aut_A(1)$ di autovettori relativi a $\lambda = 1$

3) Per quanto trovato nei punti precedenti:

- A è una matrice reale 4×4 con autovalori tutti reali $\lambda = 0, 1$
- $ma(0) + ma(1) = 1 + 3 = 4 =$ taglia di A
- $ma(0) = 1 = mg(0)$, $ma(1) = 3 = mg(1)$ $\Big\}$ dunque per ognuno degli autovalori di A, la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica

Quindi A è diagonalizzabile, con matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ e

matrice di cambio di base $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S^{-1} A S = D$

<u>Osservazioni</u>:

- La dimensione degli autospazi è <u>SEMPRE</u> ≥ 1, per cui devo <u>sempre</u> trovare almeno 1 var. libera.

Se trovo 4 pivots, c'è qualche problema (o ho sbagliato a ridurre, o ho sbagliato a trovare $p_A(\lambda)$)

1) A è matrice 4×4, per cui $p_A(\lambda)$ <u>DEVE</u> avere grado 4

2) Gli autovalori di A sono tutti reali, quindi ne devo trovare <u>ESATTAMENTE</u> 4 (contati con molteplicità).

Cioè la somma delle m.a. deve fare $4 =$ taglia della matrice e $1 + 3 = 4$, <u>ok</u>!

Se una di queste due condizioni salta, allora ho sbagliato a calcolare $p_A(\lambda)$

Esercizio 4 [punti 7]

1. Trovare il vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che:
   - (i) • La sua prima e terza coordinata sono uguali.
   - (ii) • La sua seconda coordinata è uguale 2.
   - (iii) • $w \in \text{span}\{(1,3,-1),(1,-2,4)\}$

2. Trovare la matrice A (scritta rispetto alla base canonica) associata ad una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfi le seguenti proprietà:
   - (i) • $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 3$.
   - (ii) • $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 1$.

Svolgimento:

1) $w \in \mathbb{R}^3$, per cui ha 3 coordinate: $w = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

• Dalla condizione (i) si ha che $a = c$
• Dalla condizione (ii) si ha che $b = 2$

$\Big\}\ w = \begin{pmatrix}a\\2\\a\end{pmatrix}$

• Dalla condizione (iii), deve avere soluzione il sistema con matrice associata:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & a \end{array}\right) \xrightarrow{II-3I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -5 & 2-3a \\ -1 & 4 & a \end{array}\right) \xrightarrow{III+I} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -5 & 2-3a \\ 0 & 5 & 2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III+II} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -5 & 2-3a \\ \boxed{0 \quad 0} & & \boxed{2-a} \end{array}\right) \longrightarrow \text{ci dice che } 2-a=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Dunque il vettore cercato è: $\boxed{w = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}}$

2) Ricordiamo che la base canonica di $\mathbb{R}^2$ è $\mathcal{C}an_{\mathbb{R}^2} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ e che una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, rispetto $\mathcal{C}an_{\mathbb{R}^2}$, ha matrice associata

$$M = \left(f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \middle| f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$$

colonne di M

Basta allora trovare $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

• Da (i) sappiamo che $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ è autovettore relativo a $\lambda = 3$, cioè $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

• Da (ii) sappiamo che $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore relativo a $\lambda = 1$, cioè $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

ma, essendo f lineare: $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

ovvero: $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, per cui:

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \underbrace{f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

La matrice cercata è: $A = \left(f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \middle| f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right) = \boxed{\begin{pmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}}$

Alternativa: A è una matrice 2×2 che ha, per ipotesi, 2 autovalori distinti $\lambda=3$ e $\lambda=1$, dunque è diagonalizzabile con matrice diagonale

$D = \begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ e matrice di cambio di base $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

Per cui $S^{-1}AS = D$, allora $A = SDS^{-1}$.

Troviamo S^{-1}: per le matrici 2×2, se ho $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, allora:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$$

quindi $S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$

Allora $A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}3 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}3 & -2\\0 & 1\end{pmatrix}}$$

OSS:

- Se non ci si ricordava che, per una matrice 2×2, vale $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$, allora usiamo Gauss: considero la matrice $(S \mid I_d) = \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$ e cerco di ottenere l'identità a sx: $\to$ faccio $I - II = \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$

  questa è l'inversa S^{-1}

- Un altro modo ancora è: cerco $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ t.c.:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \text{ ovvero: } \begin{pmatrix}a+c & b+d\\c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

e uguagliando gli elementi: $\begin{cases}a+c=1\\b+d=0\\c=0\\d=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\b=-1\\c=0\\d=1\end{cases}$, ovvero $\boxed{S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}}$

e poi procedo come prima per trovare $A = SDS^{-1}$