Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 13 Febbraio 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{2z-1} = e^{\overline{z}}.$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$2z^3 + i = 0.$$

Esercizio 2. [8 pt.]

1. Stabilire al variare del parametro k la dimensione del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 6 \\ -k \end{pmatrix} \right\}$$

2. Trovare una base dello spazio ortogonale $W^{\perp}$ dove

$$W = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3. **[10pt.]** OK

Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4 [punti 5+2=7]

1. Trovare la matrice A di dimensioni 3×3 che ha le seguenti proprietà:
   - A è simmetrica.
   - $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 2$.
   - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 1$.
   - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\ker(A)$.
2. (Difficile) Trovare tutte le matrici A di dimensione 2×2 tali che $A^t = A^{-1} = A$.[1]

[1] Si può usare la formula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$