Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 5 Giugno 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$8z^3 \cdot i = -1.$$

2. Si determinino tutte le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$e^z = -i.$$

Ex. 1

1) $8z^3 \cdot i = -1 \iff z^3 = -\frac{1}{8i} = \frac{1}{8} i$

$z = (\rho, \theta)$ $\qquad \frac{1}{8} i = \left(\frac{1}{8}, \frac{\pi}{2}\right)$ in coordinate polari.

$z^3 = (\rho^3, 3\theta)$.

Quindi $\begin{cases} \rho^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow \rho = \frac{1}{2} \\ 3\theta = \pi/2 + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pi/6 + \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow \end{cases}$

$\theta = \pi/6,\ 5/6\,\pi,\ 3/2\,\pi,\ \underbrace{\pi/6 + 2\pi, \ldots}_{\text{gli angoli si ripetono}}$

Le soluzioni sono:

$z_1 = \left(\frac{1}{2}, \pi/6\right) \rightsquigarrow z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i$

$z_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi\right) \rightsquigarrow z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos 5/6\,\pi + i \sin 5/6\,\pi\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i$

$z_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \rightsquigarrow z_3 = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right) =$
$= \frac{1}{2}\left(0 + i \cdot (-1)\right) = -\frac{1}{2} i$

2) $e^z = -i$

$z = a + ib \qquad e^z = (\underbrace{e^a}_{\rho}, \underbrace{b}_{\theta})$

$-i = (\underbrace{1}_{\rho}, \underbrace{-\pi/2}_{\theta})$

Dunque $\begin{cases} e^a = 1 \Rightarrow a = 0 \\ b = -\pi/2 + 2k\pi \end{cases}$

Le soluzioni sono tutti i numeri complessi

$z = \left(-\pi/2 + 2k\pi\right) i$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$

Esercizio 2. **[8 pt.]** Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare dove

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice A associata a T rispetto alla base canonica e dimostrare che A è invertibile.
2. La matrice B associata a $T \circ T \circ T$ rispetto alla base canonica è una matrice invertibile? (Motivare bene la risposta).[1]
3. Trovare la matrice C associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

[1] $T \circ T \circ T$ è l'applicazione lineare ottenuta componendo T con se stessa tre volte.

Ex. 2

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

1) La matrice associata a T rispetto alla base canonica e'

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2) $\det(A) = -6 \neq 0$, quindi A e' invertibile e di conseguenza anche $A \cdot A \cdot A$ e' invertibile; precisamente $\det(A \cdot A \cdot A) \underset{\text{Binet}}{=} \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = (-6)^3 \neq 0$.

Notiamo infatti che la matrice associata a $T \circ T \circ T$ e' $A \cdot A \cdot A$.

3) La matrice "cambio di base" e' $S = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Notiamo che $\mathcal{B}$ e' in effetti una base, visto che S e' invertibile ($\det S = -3 + 4 = 1 \neq 0$)

$C = S^{-1} A S$. Occorre trovare l'inversa S^{-1}.

Usiamo la procedura di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot II]{2\cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 4 & 2 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{II+I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{I-4II} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6} I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right). \quad \text{Quindi } S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli si ricava che

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -12 \\ 38 & 22 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. [10pt.] Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Ex. 3

Troviamo il polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1-\lambda & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{determinante}]{\text{sviluppo lungo la III colonna}}$$

$$(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{sviluppo lungo la II riga}}$$

$$(1-\lambda)(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) \cdot \left[(-\lambda)(-2-\lambda)\right] =$$

$$\lambda \cdot (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2) = P_A(\lambda)$$

1) Gli autovalori di A sono

$\lambda = 0$ molt. alg. 1

$\lambda = 1$ molt. alg. 2

$\lambda = -2$ molt. alg. 1

2) $\lambda = 0$ $\quad Aut_A(0) = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker A$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio I e III}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + 2I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+3\mathrm{II}]{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{scambio} \\ \mathrm{III} \text{ e } \mathrm{IV}}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array} \qquad x_4 = 1 \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_3 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = -2, \quad x_2 = 0$$

$$x_1 - 2\cdot(0) + (-2) + 3\cdot 1 = 0 \iff x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ è l'autovettore di autovalore $\lambda = 0$

e $\{\vec{v}_1\}$ è una base di $\mathrm{Aut}_A(0)$.

$\underline{\lambda = 1}$ $\qquad \mathrm{Aut}_A(1) = \mathrm{Ker}(A - I)$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}-2\mathrm{I}]{\mathrm{III}+\mathrm{I}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{scambio} \\ \mathrm{II} \text{ e } \mathrm{IV}}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III}+\mathrm{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

$x_3 = 1$
$x_4 = 0$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \qquad\quad = 0 \\ \quad 3x_2 \quad -3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$x_1 = -x_2 = 0$. $\qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la prima soluzione speciale

$x_3 = 0$
$x_4 = 1$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad\quad = 0 \\ \quad 3x_2 \quad -3x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 3x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

$x_1 = -x_2 = -1$. $\qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è la seconda solut. speciale

$\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ è una base di $Aut_A(1) = \ker(A - I)$

Quindi l'autovalore $\lambda = 1$ ha molt. geometrica 2 uguale alla molteplicità algebrica

$\underline{\lambda = -2}$ $\qquad Aut_A(-2) = \ker(A + 2I)$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e III}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{IV}+2\text{I}]{\text{III}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+\text{II}]{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array}\end{array}$$

$$x_4 = 1 \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 0 \\ -6x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$-6x_3 - 6x_4 = -6x_3 - 6 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = x_1 - 2\cdot 0 + \cancel{3\cdot(-1)} + \cancel{3\cdot 1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' la soluzione speciale.

$\{\vec{v}_4\}$ e' una base di $Aut_A(-2)$.

3) La matrice e' diagonalizzabile perche' tutti i suoi autovalori sono reali ed hanno molt. geom. = molt. alg.

Se $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \right)$ allora

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

visto che $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ e' una base di autovettori.

Esercizio 4. [7 pt.]

1. Trovare un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che
$$\mathrm{Im}(T) = \ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

2. Trovare tutte le matrici invertibili B di dimensione 2×2 che sono uguali alla propria inversa, cioè tali che $B^{-1} = B$.

Ex. 4

1) $Im(T) = ker(T) = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Un' A.L. che soddisfa le proprietà richieste e' la seguente $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

Infatti $Im(T) = Span\left\{T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} =$

$$= Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\} = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Notiamo poi che $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

e quindi $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in ker\, T$.

Visto che $dim(ker\, T) + dim(Im\, T) = 2$

e che $dim(Im\, T) = 1$, deve essere $dim(ker\, T) = 1$.

Possiamo concludere che $ker\, T = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

2) Notiamo che $B^{-1} = B \iff B \cdot B = I$.

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ha la proprietà richiesta

se e solo se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dunque: $\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = b(a+d) = 0 \\ ca + dc = c(a+d) = 0 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases}$

Sottraendo termine a termine la I e IV equazione si ottiene:

$a^2 - d^2 = 0 \iff (a-d)(a+d) = 0$

CASO 1 $\quad a - d = 0$, cioè $a = d$

la II e III equazione diventano: $2ab = 0$, $2ac = 0$

- Se $a = 0$, e quindi $a = d = 0$, queste 2 equazioni sono soddisfatte. La I e la IV diventano $bc = 1$

  Otteniamo tutte le matrici della forma $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}$

  con $b \neq 0$ qualunque

- Se $a \neq 0$ allora deve essere $b = 0$ e $c = 0$.

  la I e la IV diventano $a^2 = 1$ (visto che $a = d$)

Quindi $a = d = 1$ oppure $a = d = -1$.

Otteniamo tutte le metrici ~~delle forme~~ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>CASO 2</u> $a + d = 0$, cioè $a = -d$

In questo caso II e III sono soddisfatte.

Da I ricaviamo $a = \pm\sqrt{1-bc}$, quindi deve essere $bc \leq 1$.

Otteniamo tutte le metrici delle forme

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & +\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$$

dove b, c sono numeri qualunque purché $bc \leq 1$.

Osserviamo che il <u>caso 2</u> include il <u>caso 1</u>

come caso particolare ponendo $bc = 1$ oppure $b = c = 0$,

$\Updownarrow$

$c = 1/b$

ma **NON** include le metrici

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ viste nel caso 1.