Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 26 Giugno 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Siano $z = \sqrt{3} + i$ e $w = 1 + i$ e due numeri complessi. Calcolare $\frac{z}{w^4}$.
2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z^6 + 1 = 0.$$

Esercizio 2. **[8 pt.]** Consideriamo i seguenti sei vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \ w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \ w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base di $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.
2. Trovare una base di $W = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$.
3. Trovare una base del sottospazio $V + W$.
4. Trovare una base del sottospazio $V \cap W$.

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 3 \\ 6 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4. [7 pt.]

1. Trovare tutte le matrici 2×2 che sono associate (rispetto alla base canonica) ad applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $\ker(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

2. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Nel contesto dei numeri complessi, dimostrare che A è una matrice diagonalizzabile. (Motivare bene la risposta).