Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 26 Giugno 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Siano $z = \sqrt{3} + i$ e $w = 1 + i$ e due numeri complessi. Calcolare $\frac{z}{w^4}$.
2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z^6 + 1 = 0.$$

(1.) In coordinate polari $w = (\underset{\rho}{\sqrt{2}}, \underset{\theta}{\pi/4})$,

quindi $w^4 = ((\sqrt{2})^4, 4 \cdot \frac{\pi}{4}) = (4, \pi)$, cioè

$w^4 = -4$

Quindi $\frac{z}{w^4} = \frac{\sqrt{3}+i}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}$

(2) $z^6 = -1$

In coordinate polari, $z = (\rho, \theta) \Rightarrow$

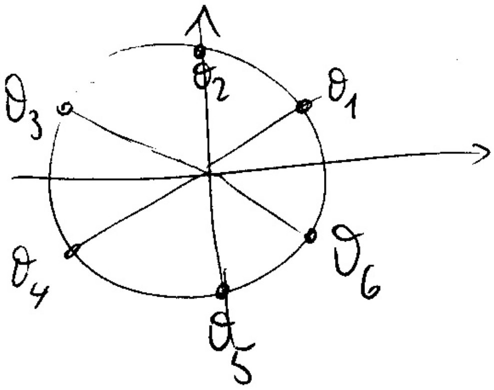
$z^6 = (\rho^6, 6\theta)$ e $-1 = (1, \pi)$.

Quindi:

$$\begin{cases} \rho^6 = 1 & \Rightarrow \rho = 1 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi & \Rightarrow \theta = \pi/6 + k\,\pi/3 \end{cases}$$, quindi

$\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \frac{5}{6}\pi$,

$\theta_4 = 7/6\,\pi$, $\theta_5 = \frac{3}{2}\pi$, $\theta_6 = \frac{11}{6}\pi$. Poi si ripetono.



Le soluzioni sono:

$z_1 = (1, \theta_1) \rightsquigarrow$

$\cos\pi/6 + i\sin\pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_2 = (1, \theta_2) \rightsquigarrow$

$\cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = i$

$z_3 = (1, \theta_3) \rightsquigarrow \cos 5/6\,\pi + i\sin 5/6\,\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$z_4 = (1, \theta_4) \rightsquigarrow \cos 7/6\,\pi + i\sin 7/6\,\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_5 = (1, \theta_5) \rightsquigarrow \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i$

$z_6 = (1, \theta_6) \rightsquigarrow \cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Esercizio 2. **[8 pt.]** Consideriamo i seguenti sei vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \ w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \ w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \ w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base di $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.
2. Trovare una base di $W = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$.
3. Trovare una base del sottospazio $V + W$.
4. Trovare una base del sottospazio $V \cap W$.

(1.) Mettiamo in colonna i vettori v_1, v_2, v_3 e riduciamo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+4\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

I primi 2 vettori (v_1 e v_2) formano una base dell'immagine dell'appl. lineare associata alla matrice, cioe' formano una base di $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

(2) Procediamo come sopra.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-2\text{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

I primi due vettori w_1, w_2 formano una base di $\operatorname{Span}\{w_1, w_2, w_3\}$.

3) Visto che $\{v_1, v_2\}$ e' una base di V e che $\{w_1, w_2\}$ e' una base di W, allora $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ e' un insieme di generatori di $V+W$.

Per ricavare una base procediamo come prima.

$$\left(v_1 \middle| v_2 \middle| w_1 \middle| w_2 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}+4\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

I primi 3 vettori v_1, v_2, w_1 formano una base di $\operatorname{Span}\{v_1, v_2, w_1, w_2\} = V + W$.

(4.) Sia $A = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| w_1 \middle| w_2 \right)$ la matrice di prima.

Dalla riduzione abbiamo visto che x_4 e' l'unica variabile libera. Troviamo la soluzione speciale:

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ \quad -2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad\quad -x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -x_3 - 1 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$-2x_2 + x_3 + x_4 = -2x_2 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo significa che $A \cdot \vec{s} = \vec{0}$,

cioe' $1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 = 0 \iff$

$v_1 = w_1 - w_2$ e' un vettore che appartiene sia a V che a W, cioe' $v_1 \in V \cap W$.

Per Grassman $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V+W)$
$= 2 + 2 - 3 = 1$.

Quindi $\{v_1\}$ e' una base di $V \cap W$.

Esercizio 3. [10pt.]

Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 3 \\ 6 & 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

1. $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 & 3 \\ 6 & 2-\lambda & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{det}}$$ (sviluppo lungo la IV riga)

$$(-1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 6 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \longrightarrow$$ (sviluppo lungo la III riga)

$$(-1-\lambda)(2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)\left[(-1-\lambda)(2-\lambda)-0\right]$$

$$= (-1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^2$$

$\lambda = -1$ autov. di molt. alg. 2

$\lambda = 2$ autov. di molt. alg. 2

(2) $\lambda = -1$

$$\mathrm{Aut}(A,-1) = \ker(A + 1 \cdot I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con i consueti calcoli (riduzione $\rightarrow$ soluzioni speciali) si trova che una base di $\mathrm{Aut}(A,-1)$ e' la seguente

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi l'autospazio dell'autovalore $\lambda = -1$ ha dimensione 2, cioe' la molt. geometrica di $\lambda = -1$ e' 2.

$\lambda = 2$

$$\mathrm{Aut}(A,2) = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli si ricava che una base di $\mathrm{Aut}(A,2)$ e' $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Anche in questo caso la molt. geometrica e' 2.

(3). Visto che tutti gli autovalori sono reali e che per ognuno di loro la molt. algebrica e' uguale alla molt. geometrica, la matrice e' diagonalizzabile.

Infatti $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

è una base di autovettori. Se

$$S = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice "cambio di base"

allora $S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è

la matrice diagonale avente sulla diagonale gli autovalori corrispondenti agli autovettori della base.

Esercizio 4. [7 pt.]

1. Trovare tutte le matrici 2×2 che sono associate (rispetto alla base canonica) ad applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tali che $\ker(f) = \operatorname{Im}(f) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

2. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
Nel contesto dei numeri complessi, dimostrare che A è una matrice diagonalizzabile. (Motivare bene la risposta).

1. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker f$ quindi la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica ha $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ come prima colonna, cioè $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Visto che $\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, deve essere $b = 0$ (e $a \neq 0$).

Quindi le matrici con le proprietà richieste sono tutte e sole quelle della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } a \neq 0.$$

(2.)

Il polinomio caratteristico di A e'

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+4$$

le cui radici complesse sono $\lambda_1 = -2i$ e $\lambda_2 = 2i$.

Avendo due autovalori complessi distinti, la matrice A 2×2 e' diagonalizzabile nel campo dei numeri complessi.

Più in dettaglio:

$\underline{\lambda = -2i}$

$$\mathrm{Aut}(A, -2i) = \ker(A+2iI) = \ker\begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2i & 4 \\ -1 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 2i & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}+2i\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} P & L \end{array}$$

x_2 e' variabile libera

$x_2 = 1$ $\quad \{-x_1 + 2i x_2 = 0 \Rightarrow -x_1 + 2i \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2i$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ e' autovettore di autovalore $\lambda = -2i$

$\underline{\lambda = 2i}$

$$\mathrm{Aut}(A, 2i) = \ker(A - 2i\,I) = \begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I} \leftrightarrow \text{II}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} - 2i\,\text{I}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} P & L \end{array} \end{array}$$

x_2 e' variabile libera

$x_2 = 1 \quad \{ -x_1 - 2i\,x_2 = 0 \Rightarrow -x_1 - 2i \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -2i$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$ e' autovettore di autovalore $\lambda = +2i$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e' una base di autovettori

Se $S = \begin{pmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e' la matrice "cambio di base"

allora $S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$ e' diagonale.