Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 8 Gennaio 2024

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = z^2.$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione, esprimendole in coordinate polari:

$$z^3 - 7\,\bar{z}^2 = 0.$$

Esercizio 2. [8 pt.]

Sia $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata (rispetto alla base canonica) è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base dell'immagine di f.

2. Determinare la dimensione del nucleo di f.

3. Determinare una base del nucleo di f.

4. Trovare tutti i vettori $\vec{v} \in \mathbb{R}^5$ tali che $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. [10pt.] Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4. [6 pt.]

Consideriamo le applicazioni lineari $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che godono, simultanemante, delle seguenti proprietà:

- Il vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di f corrispondente all'autovalore $\lambda = -1$;
- Il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di f corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$.

1. È vero che esiste un'unica applicazione lineare f siffatta? (Motivare bene la risposta).
2. Scrivere la matrice A associata, rispetto alla base canonica, ad un'applicazione lineare f che abbia le proprietà richieste.