GEOMETRIA

12/10/2015

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ = insiemi numerici

$\mathbb{N}$ = numeri naturali

$\mathbb{Z}$ = numeri interi (anche negativi)

$\mathbb{Q}$ = " razionali (frazioni)

$\mathbb{R}$ = " reali

C'è anche $\mathbb{C}$ = numeri complessi → i = unità immaginaria $i^2 = -1$

NOTAZIONI INSIEMISTICHE

Modi x indicare gli insiemi:

- Per elencazione (non si può sempre, è tipicamente x insiemi finiti)

  es. $A = \{1, -5, 7, 12\}$

- Per descrizione (si dicono le proprietà degli elem che ci stanno dentro)

  es. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

- Per notazione funzionale

  es. $Q = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$ → elencaz. → non troppo corretto

  $Q = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un quadrato}\}$ descrit.

  $\Downarrow$

  $\exists m \in \mathbb{N} \; m^2 = n$

  tale che è sottointeso

$\boxed{\neg = \text{NON}}$

$Q = \{m^2 \mid m \in \mathbb{N}\}$ → si descrivono i valori tramite la funzione quadrato. (si applica il quadrato a tutti i numeri $\in \mathbb{N}$)

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ → NUMERI DISPARI

- x elencazione $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \ldots\}$ si mettono puntini anche se non sarebbe corretto
- x descrizione $= \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}_0 \; 2m+1 = n\}$
- funzionale $= \{2m+1 \mid m \in \mathbb{N}_0\}$

n è PARI → $\exists m \in \mathbb{N} \; 2m = n$

convenzione x i numeri dispari:

$\mathbb{N} \rightarrow 0 \notin \mathbb{N}$

$\mathbb{N}_0 \rightarrow 0 \in \mathbb{N}_0$

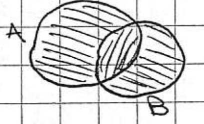
ES) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \; y^2 = x\}$

$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \; m^2 = n\}$

$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)$

OPERAZIONI INSIEMISTICHE

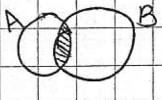
sono valide tutt'e 2

$A \cup B$  $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \underset{\uparrow}{\text{o}} \ x \in B\}$ → o in A, o in B, o in tutt'e 2

unito

$\vee = \text{o}$

$\wedge = \text{e}$

$A \cap B$  $A \cap B = \{x \in A \ \text{e} \ x \in B\}$ → x forza comune a tutt'e 2

$A \subseteq B$ → A è incluso in B  $\forall x \, (x \in A \overset{\text{implicazione}}{\Rightarrow} x \in B)$

→ possono anche essere uguali

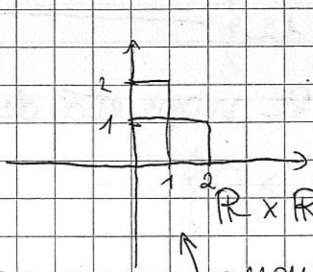
ES

$A \subseteq \mathbb{N}$ n° pari

$B \subseteq \mathbb{N}$ n° dispari ⓐ vero o ~~falso~~? vero

$A \cap B = \{0\}$ falso, xché $\boxed{A \cap B = \emptyset}$ $\{0\} \neq 0$

ⓑ $(1,2) \in A \times B$



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ⇒ PRODOTTO CARTESIANO

→ non si possono scambiare

es

$A = \{1,3,5,6\}$

$B = \{2,3\}$

Coppie ordinate ⇒ $(1,2) \neq (2,1)$

conta la 1ª contenente e anche la seconda, conta l'ordine

Coppia = insieme con 2 oggetti

↳ $\{1,2\} = \{2,1\}$

es $(1,2) \in A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a,b) \mid a \in A \ \text{e} \ b \in B\}$ ⇒ $A \times B \neq B \times A$

↳ NON È VERO

$(1,2) \in B \times A$ → VERO ← $(2,1) \in A \times B$

INSIEME CON n elem.

$|A| = 7$

cardinalità di $A = 7$

$A = \{1,3,5,6\}$ $B = \{2,3\}$

$$A \times B = \{(1,2);(1,3);(3,2);(3,3);(5,2);(5,3);(6,2);(6,3)\}$$
$$\neq$$
$$B \times A = \{(2,1);(2,3);(2,5);(2,6);(3,1);(3,3);(3,5);(3,6)\}$$

↳ $A \times B \neq B \times A$ però $|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|$

hanno la stessa cardinalità.

ES $A \subseteq \mathbb{N}$ numeri pari

$B \subseteq \mathbb{N}$ " dispari

$A = \{1, 3, 5, 6\}$

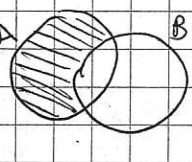
$B = \{2, 3\}$

9. $(4, -1) \in A \times B$ FALSA xchè $-1 \notin B$

10. $\mathbb{N} \setminus (A \cup B) = \emptyset$

differenza insiemistica

$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$



A B

$= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \setminus B = \{1, 5, 6\}$

Se $A \subseteq B$, • $A \setminus B = \emptyset$

• $A \cap B = A$
• $A \cup B = B$
$A \subseteq B$

ES

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \quad 3y = x\} \rightarrow$ MULTIPLI DI 3

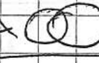
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \quad x = y^2\} \rightarrow$ QUADRATI

7. $27 \in A \cap B$ FALSO $\rightarrow$ appartiene ad A, ma non a B

8. $(A \cup B) \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} = \emptyset$ FALSO

equivale

$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$



A B

$(A \cup B) \cap \{1, 2\} = \{1\}$

$1 \in B \Rightarrow 1 \in A \cup B \Rightarrow 1 \in (A \cup B) \cap \{1, 2\}$

$2 \notin A \cup B$ perchè $2 \notin A \wedge 2 \notin B \Rightarrow 2 \notin (A \cup B) \cap \{1, 2\}$

9. $1 \in A \cap B$ Falso xchè $1 \in A$

10. $(A \cup B) \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\} = \{0\}$ FALSO

$(1, -1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ VERO

$\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ VERO

$(1, 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ VERO

$\mathbb{N} \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}$ VERO

ESAME =
scritto in 2 parti:
il test $\rightarrow$ quiz vero/falso
" un po' + di vero/falso

ES • $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists K \in \mathbb{N} \quad n = 3K + 1\}$ NUMERI CHE DIVISI X 3 MI DANNO RESTO 1 $= \{4, 7, 10, 13 \ldots\}$

$B = \{2, 3, 5, 6\}$

$A \cap B = \emptyset$ VERA

• $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists K \in \mathbb{N} \quad n = K^2\}$

• $B = \{2, 3, 5, 6\}$

$A \cap B = \emptyset$ VERA

(ES) $A = \{0, 1, 2\}$

$\exists y \in \mathbb{N} \; 2y = x$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 7 \wedge \text{"}x \text{ pari"}\} = \{2, 4, 6\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è divisibile per } 7\}$

$\exists m \in \mathbb{N} \; 7m = x$

$A \cap B = \{2\}$

$A \cap C = \emptyset$

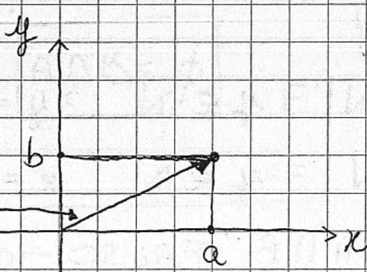
$(1, 0) \in A \times B$ FALSO xchè zero non sta in B

PIANO CARTESIANO (rivisitato)

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R}^n$

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$

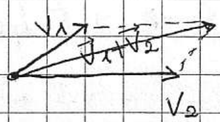
P coordinate (a, b)

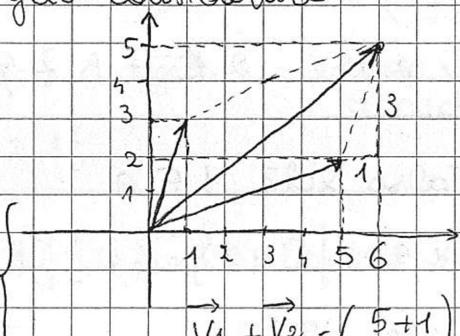


VETTORE: lunghezza (modulo)
direzione
verso

Piano cartesiano pensato come vettori che partono dall'origine e mi danno tutti i punti che voglio considerare

SOMMA: $\vec{V_1} + \vec{V_2}$





$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

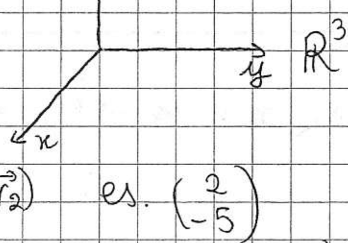
$\vec{V_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$\vec{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\vec{V_1} + \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

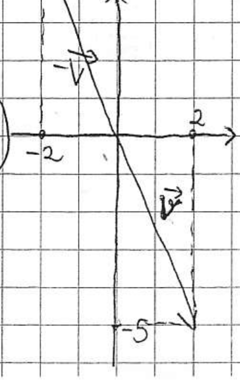
Con 3 dimensioni: x, y, z



$\mathbb{R}^3$

DIFFERENZA: $\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$ $\quad$ es. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$-\vec{V} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$



$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$\vec{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$-\vec{V_2} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$

$\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

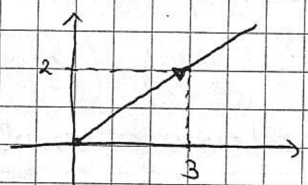
PRODOTTO per uno SCALARE:

$5 \cdot \vec{V}$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 5y_1 \end{pmatrix}$$

RETTE NEL PIANO

Rette x l'origine



Retta x l'origine e per il punto $(3,2)$

$\vec{V} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda \cdot \vec{V} \rightarrow$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ trovo tutti e soli i punti della retta

si indicano come i multipli dei vettori passanti x l'origine

$$\left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \leftrightarrow \text{Retta x l'origine di direzione } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PIANI PER L'ORIGINE NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \middle| \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

dove V_1 e $V_2 \in \mathbb{R}^3$

COMBINAZIONE LINEARE

$\hookrightarrow \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vettori dalla base canonica

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 7 \cdot \vec{e}_1 - 4 \vec{e}_2$$

$$= 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Al variare delle combinazioni lineari di $\vec{e}_1$ ed $\vec{e}_2$ si troveranno tutti i vettori del piano

13/10/2015

Cos'è una funzione?

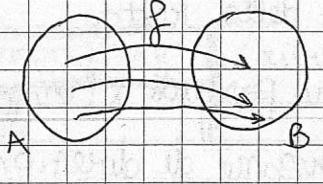
$f: A \to B$
dominio → codominio

DEF: legge che associa ad ogni elem. $a \in A$ un elem. unico $b \in B$
univoca

(ES) $f(x) = x+1$

In base a dominio e codominio cambiano le caratterist. della funzione

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$



(ES)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xmapsto{f} a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\neg\exists \equiv \forall\neg$

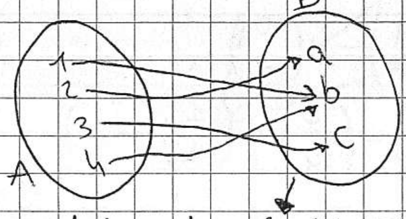
$\neg\forall \equiv \exists\neg$

$\neg\forall\exists \to \exists\neg\exists \to \exists\forall\neg$

1. f iniettiva
2. f suriettiva ⟶
3. f biunivoca

(2) f suriettiva

$f: A \to B$



$A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{a, b, c\}$

→ qualunque elem. del codominio è "colpito" dal dominio

$f: A \to B$ è suriettiva se $\forall b \in B \; \exists \, a \in A \; f(a) = b$

f non suriettiva: esiste almeno un $b \in B$ t.c. $\forall a \in A \; f(a) \neq b$

(ES) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xmapsto{f} a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$

Come vedo se f è suriettiva?

- Prendo un elem. qualunque del codominio $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Per esempio $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$: dobbiamo vedere se esiste o no un elem. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ del dominio tale che $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{f} a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Faccio $f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a-3b \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

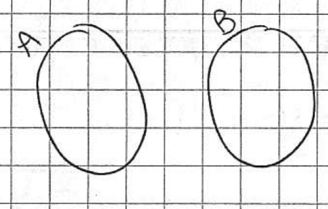
Cerco $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ t.c. $\begin{cases} 2a = 4 & \Rightarrow a = 2 \\ a - 3b = 1 & \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

- In generale:

Prendo un elem. qualunque del codom. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Dobbiamo vedere se esiste o no un elemento $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del dominio tale che $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ELEMENTI DI DOMINIO E CODOMINIO



L'immagine di f è l'insieme di tutti gli elem. del codominio che sono "immagine" di almeno un elem. del dominio

f suriettiva significa Imm. $f = B$

$f(a) = b \rightarrow$ "b è imm. di a mediante la funzione f"

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x-3y \end{pmatrix}$$

$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ CALCOLI: $\begin{pmatrix} 2x \\ x-3y \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x = a & x = a/2 \\ x - 3y = b & 3y = x - b = a/2 - b \Rightarrow y = \dfrac{a}{6} - \dfrac{b}{3} \end{cases}$$

Conclusione: $f\begin{pmatrix} a/2 \\ a/6 - b/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ESEMPIO X CALCOLARE f: $\begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$a/2 = -7/2$

$a/6 - b/3 = -7/6 - 2/3 = \dfrac{-7-4}{6} = -\dfrac{11}{6}$

$f\begin{pmatrix} -7/2 \\ -11/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

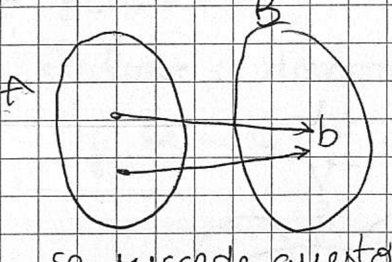
→ Verifico:

$$f\begin{pmatrix}-7/2\\-11/6\end{pmatrix} \overset{\text{definizione}}{=} -\frac{7}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} - \frac{11}{6}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\-7/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\11/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$$

Perciò f è suriettiva ← perché questo vale per ogni $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

① f iniettiva

"non si sprecano frecce" alla rovescia



se succede questo f non è iniettiva

Def. f NON è iniettiva se

$$\exists x_1 \exists x_2 \quad x_1 \neq x_2 \text{ t.c. } f(x_1) = f(x_2)$$

o

$$\exists\, x_1 \neq x_2$$

(ES) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

- è suriettiva? $f(x) = x^2 \overset{?}{=} -1$ IMPOSSIBILE

  $\underline{\operatorname{Im} f} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \overset{?}{=} [0, +\infty)$

  NON È SURIETTIVA PERCHÉ → $\neq \mathbb{R}$

- è iniettiva? NO, xchè esistono p.ti DIVERSI $x_1 \neq x_2$ t.c. $f(x_1) = f(x_2)$

  Ad esempio $-4 \neq 4$ ma $f(-4) = 16 = f(4)$

Def. di iniettiva

$$\circledast\ P \Rightarrow Q$$
$$\shortparallel$$
$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

$\neg \forall \equiv \exists \neg$
$\neg \exists \equiv \forall \neg$
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$

f è iniettiva → $\forall x_1 \forall x_2 \,(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

oppure $\forall x_1 \forall x_2 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ← $\circledast$ contronominale

Come lo vedo se è iniettiva

(ES) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = 3x - 2$

x_1, x_2 qualunque $f(x_1) = \boxed{3x_1 - 2 = 3x_2 - 2} = f(x_2)$

$$3x_1 \cancel{-2} = 3x_2 \cancel{-2}$$

$$3x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow 3(x_1 - x_2) = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \to \text{È INIETTIVA}$$

(ES) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \quad f$ è iniettiva?

Prendo x_1, x_2 qualunque e suppongo che $f(x_1) = f(x_2)$, cioè che

$$x_1^2 - x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

→ $x_1 - x_2 = 0$ → $x_1 = x_2$

o

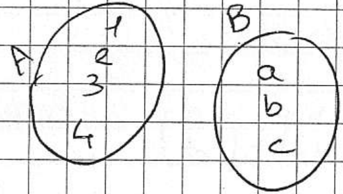
→ $x_1 + x_2 = 0$ → $x_1 = -x_2$

NON È INIETTIVA PER QUESTO

si può avere $f(x_1) = f(x_2)$ anche se $x_1 \neq x_2$

③ f biunivoca

Def. $f: A \to B$ è BIUNIVOCA (o è una BIEZIONE) se
f è sia iniettiva che suriettiva
"f è iniettiva" e "f è suriettiva"



esistono $f: A \to B$ biunivoca?
NO, NON può essere INIETTIVA

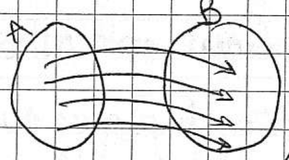
Se A e B sono FINITI e $|A| > |B|$
allora non esistono ($\neg\exists$) $f: A \to B$ iniettive

LIBRI DI TESTO
Strang
"Introduction to linear algebra"
~~DISPENSE I PARTE~~
~~[illegible]~~

Faccio la contronominale:

Se $\underbrace{|A| > |B|}_{P}$ allora $\underbrace{\text{"non esistono } f: A \to B \text{ iniettive"}}_{Q}$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$: Se esiste $f: A \to B$ iniettiva allora $|A| \leq |B|$



Addirittura vale
$\exists f: A \to B$ iniettiva
$\Updownarrow$
$|A| \leq |B|$

Perché di solito $P \Rightarrow Q \neq Q \Rightarrow P$

alla rovescia vale
Se $|A| \leq |B|$ allora esiste ($\exists$) $f: A \to B$ iniettiva

RIASSUMENDO

$\exists f: A \to B$ suriettiva
$\Updownarrow$
$|B| \leq |A|$

$\exists f: A \to B$ iniettiva
$\Updownarrow$
$|A| \leq |B|$

$\exists f: A \to B$ biunivoca
$\Updownarrow$
$|A| = |B|$

15/10/2015

riassumendo...

FUNZIONI BIUNIVOCHE

$f: A \to B$ è biunivoca se f è sia iniettiva che suriettiva

Se A e B sono finiti:

- $\exists f: A \to B$ iniettiva $\Leftrightarrow |A| \leq |B|$
- $\exists f: A \to B$ suriettiva $\Leftrightarrow |A| \geq |B|$

ES

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (*) $\quad f(x) = x^2$

1. f suriettiva? NO $\to$ esistono n° reali $r \in \mathbb{R}$, ad es. $r = -1$, t.c. $r \notin \operatorname{Im} f$ cioè $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \neq r$
2. f iniettiva? NO $\to$ ad es. $f(4) = f(-4) = 16$

ES $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n^2$

1. f è suriettiva? NO xchè esistono numeri $m \in \mathbb{N}$ t.c. $m \notin \operatorname{Im} f$

   Ad es. $m = 3$ NON è quadrato di alcun numero naturale

2. f è iniettiva? SI. Dim. Suppongo che $f(n) = f(m)$,

   cioè se $n^2 = m^2$ allora $n = m$

   perchè prendo i numeri naturali (>0)

INIETTIVITÀ

$\forall x \forall y$

$\underbrace{f(x) = f(y)}_{\text{IPOTESI}} \Rightarrow \underbrace{x = y}_{\text{TESI}}$

Se facevo $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ f non era iniettiva

COME FACCIO A FARLA DIVENTARE BIUNIVOCA? (*)

$f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ $\to$ pongo queste restrizioni sul dominio e il codominio

$f(x) = x^2 \to$ è biunivoca?

SURIETTIVITÀ $\to$ devo vedere se è vero che $\forall y \in [0, +\infty]$ esiste $x \in [0, +\infty)$ t.c. $f(x) = y$

Sì, prendo $x = \sqrt{y}$

INIETTIVITÀ $\to$ SÌ

$\Big\}$ È BIUNIVOCA

ERRORE = f è iniett. se ad ogni elem corrisponde un solo elem. $\Rightarrow$ NO

$\lfloor\to$ SE SCRITTA COSÌ È GIUSTA = ogni elem. del codominio è immagine di (al più) un elem. del dominio

suriettività = ogni elem. del codominio è immagine di almeno un elem. del dominio

NB. OGNI ELEM. HA UNA SOLA IMMAGINE $\Rightarrow$ QUESTA PROPRIETÀ È VERA X TUTTE LE FUNZIONI

APPLICAZIONI LINEARI

- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{esempio di applicaz. lineari}$$

SURIETTIVA? È vero o no che per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ esiste (almeno un) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ESEMPIO: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Domanda $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$?

Voglio vedere se è vero o no che esiste $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ t.c. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Un tentativo:

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$ non va bene

a caso

→ non si va a tentativi, si usa la definiz. della funzione e si risolve l'equaz.

$$\begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 3x_1 - 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = -2 \Rightarrow 2x_1 - 2(3x_1 - 1) = -2 \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{array}}$$

Verifico che è giusto:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

è immagine di

ES Se non ho $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ma ho $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = a \\ 2x_1 - 2x_2 = b \end{cases}$$

f è suriett. equivale a dire che il sistema ha soluz. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 \\ b & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}$$

Determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - (-1)(2) = -6 + 2 = 4$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-4} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-4} = 2$$

SISTEMI IMPOSSIBILI

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

x SOSTITUZIONE:

$x_2 = 2x_1 - 3$

$6x_1 - 6x_1 + 9 = 2$

CON CRAMER:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}} \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6-(-6) = 0$$

non posso dividere x 0 per zero

~~ALTRO~~ SISTEMI
ESEMPIO: INDETERMINATI = INFINITE SOLUZIONI

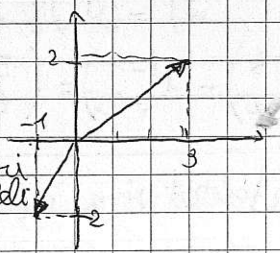
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 3 \\ 6x_1 - 3x_2 = 9 \quad 6x_1 - 3(2x_1 - 3) = 9 \end{cases}$$

$$\cancel{6x_1} - \cancel{6x_1} + 9 = 9$$

GRAFICAMENTE

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{OK}$$

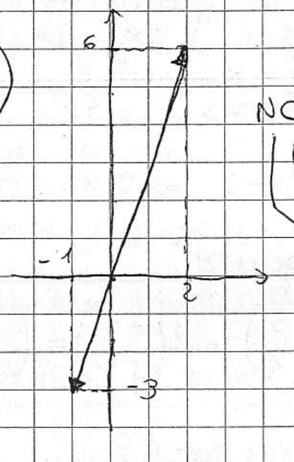
xchè i vettori non sono paralleli



$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

NO → xchè i vettori sono paralleli (stessa direzione)

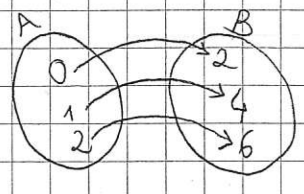
→ o indeterminata o impossibile



ES $A = \{0, 1, 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 7 \land \text{"}x\text{ pari"}\} = \{2, 4, 6\}$

- Esiste $f: A \to B$ biunivoca? SI



- $(1, 0) \in A \times B$ → FALSO, perché $0 \notin B$

ES $A = \{0, 1, 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \text{"}x\text{ è divisibile per 7"}\}$ che NON contiene zero

$A \cap B = \emptyset$ Vero perché c'è $\mathbb{N}$; se ci fosse stato $\mathbb{N}_0$ era falso perché

$0 \in A \cap B$ visto che $0 \in \mathbb{N}_0$ e 0 è multiplo di 7

$= \mathbb{N} \cup \{0\}$

existe $f: A \to B$ iniettiva

$\boxed{SI}$

ATTENZIONE CON GLI INSIEMI INFINITI

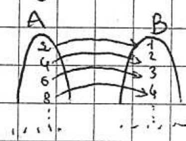
$A = \mathbb{N}$

sottoinsieme proprio

$B \subsetneq \mathbb{N}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari}\}$

eppure $\exists f: B \to A$ biunivoca



Anche se non finiscono mai, tutte le frecce colpiscono tutti gli elem. di B, quindi è biunivoca. La funzione che li lega è che in A ci sono elem. che corrispondono al doppio degli elem. di B
(es. $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, ...)

"il tutto è maggiore della parte"
↳ con gli insiemi infiniti non vale

PRODOTTO SCALARE →

① Moltiplicazione per scalare → NUMERO x VETTORE = VETTORE

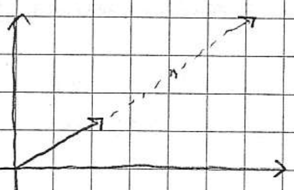
n° reale ← $\lambda \cdot \vec{v}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

se $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ allora $\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

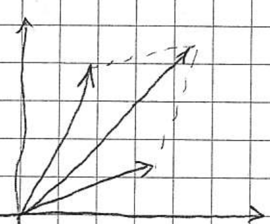
se $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ allora $\lambda \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$ ecc...

$\lambda = 3$



$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $3 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

② Somma di vettori

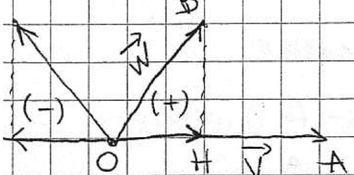


$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1} + \vec{v_2} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

ES $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

PRODOTTO SCALARE → VETTORE × VETTORE = NUMERO

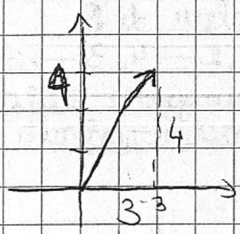


$\vec{v} \cdot \vec{w}$

$\vec{OH}$ = proiez. del vettore $\vec{w}$ su $\vec{v}$

Il prodotto scalare è il prodotto tra la lunghezza di $\vec{v}$ e $\vec{OH}$ (si mette segno (−) se la proiez. $\vec{OH}$ e $\vec{OA}$ hanno versi opposti)

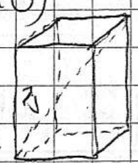
LUNGHEZZA DI UN VETTORE → $\|\vec{v}\|$



$\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$

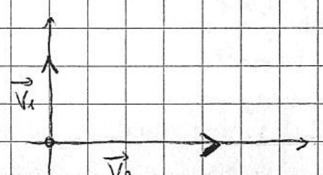
CON 3 ASSI x, y, z (NELLO SPAZIO)

$\vec{v} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $\|\vec{v}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ ⇒ 

sono le 3 dimens. di →

(ES) $\vec{v_1}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$ $\vec{v_2}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$

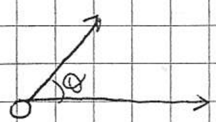
$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = ?$



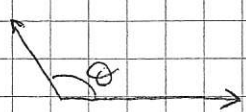
fa zero, xchè la proiez. di $\vec{v_1}$ su $\vec{v_2}$ è zero

N.B. ["Il prodotto scalare di 2 vettori è zero se e solo se i due vettori sono perpendicolari"]

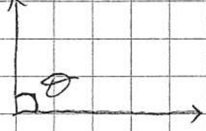
COME SI CALCOLA IL PRODOTTO SCALARE:



$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \cdot \underbrace{\left[\|\vec{v_2}\| \cos\theta\right]}_{\text{lunghezza di } \vec{OH}}$ → θ = angolo tra i 2 vettori

Se 

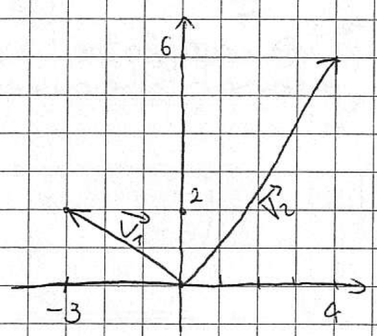
Se θ è tra $\frac{\pi}{2}$ e π il coseno è negativo, quindi il prodotto scalare è "

Se 

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ il coseno di θ è zero, xciò il prodotto scalare è zero

ALTRO METODO x TROVARE IL PRODOTTO SCALARE:

$\vec{V_1}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ $\vec{V_2}\begin{pmatrix}4\\+6\end{pmatrix}$ $\vec{V_1} \perp \vec{V_2}$?



Per dire se sono $\perp$ trovo l'angolo utilizzo un'altra formula che mi xmette di trovare il prodotto scalare

$$\boxed{\vec{V_1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \quad \vec{V_2}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} \qquad \vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = x_1y_1 + x_2y_2}$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} = (-3)\cdot 4 + 2\cdot 6 = 0 \Rightarrow$$ Sì, sono perpendicolari

NELLO SPAZIO → In $\mathbb{R}^3$, formula analoga

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Es) Qual è l'angolo formato dai vettori

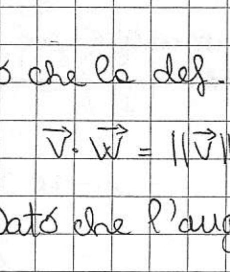
$\vec{V} = \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$ e $\vec{W} = \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$?

Faccio $\vec{V}\cdot\vec{W} = \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = -8+3-10 = -15 \Rightarrow$ da qui si deduce che l'angolo è OTTUSO

So che la def. del prodotto scalare è

$\vec{V}\cdot\vec{W} = \|\vec{V}\|\cdot\|\vec{W}\|\cdot\cos\theta$

Dato che l'angolo è ottuso considero la parte della circonf. goniom. tra 0 e π



$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ } è BIUNIVOCA:

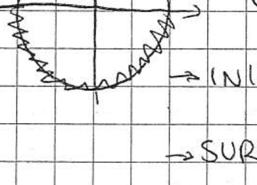
→ INIETTIVA = angoli diversi in $[0,\pi]$ hanno coseni diversi

→ SURIETTIVA = per ogni numero $y \in [-1,1]$ esiste $\theta \in [0,\pi]$ t.c. $\cos\theta = y$

· UNA FUNZIONE SI PUÒ INVERTIRE SOLO SE È BIUNIVOCA

Es) cos → arccos
↓
funz. inversa del coseno

· MISURA IN RADIANTI DI UN ANGOLO:



θ in radianti $= \frac{l}{R}$

→ Quindi il coseno di θ è:

$$\theta = \arccos \frac{-15}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \Leftarrow \cos\theta = \frac{-15}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$$

N.B.

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}\cdot\vec{W}}{\|\vec{V}\|\cdot\|\vec{W}\|}$$

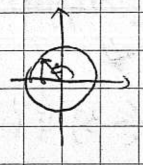
θ = angolo tra i 2 vett. $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Perciò, utilizzando questa regola: →

$\vec{V}\cdot\vec{W} = -15 \qquad \|\vec{V}\| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$$\cos\theta = \frac{-15}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{21}} = \frac{-15}{\sqrt{798}} \sim 0{,}53$$



$$\theta = \arccos\frac{-15}{\sqrt{798}}$$

ES I vettori $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ sono perpendicolari?

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = -1+(-1)+(-1) = -3 \Rightarrow \text{Non sono perpendicolari}$$

ES $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \perp ? \quad (2\cdot1)+(1\cdot1)+(-1\cdot3) = 2+1-3 = 0 \Rightarrow$ Sì, sono perpendicolari

ES Le coordinate del vettore $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = ⊛$

Trovare $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ tale che $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

si può formulare così o così

$$⊛ \begin{pmatrix}2x_1\\x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x_2\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1-x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 = 5\\ x_1 + x_2 = 2\end{cases}$$

X risolvere il sistema uso Cramer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}5 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{5\cdot1-(-2)}{3} = \frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix}2 & 5\\1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{4-5}{3} = -\frac{1}{3}$$

sono le coordinate del vettore che sto cercando rispetto a $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, cioè rispetto alla base

• È vero o no che le coord. sono $\begin{pmatrix}8\\7\end{pmatrix}$?

Cioè è vero o no che $8\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ NO

16/10/2015

ES Il vettore $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ appartiene allo span dei vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$? ✻✻
✻

COMBINAZ. LINEARE

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \to 3 \text{ dimensioni}$$

$\hookrightarrow f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

es. $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} \xrightarrow{f} 2\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \to f\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix}$ uno degli infiniti valori che stanno nell'immagine

Se $V_1, V_2, \ldots, V_k$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$

Def. **SPAN** $\{V_1, \ldots, V_k\} = \{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_k V_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$ ◎

es.

$$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\} = \text{Im } f$$

~~assegnandogli un valore mi danno gli infiniti vettori che compongono la funzione~~

→ È L'INSIEME DI TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI DEI VETTORI $V_1, \ldots, V_k$

✻ ESPRESSIONI EQUIVALENTI X DIRLO:

1. $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ appartiene allo Span $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$
2. $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ è combinaz. lineare dei vettori $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ appartiene all'immagine dell' appl. lineare $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

COMBINAZ. LINEARE

✻✻ $$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\\3x_1 - x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = -1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

◎ se $V_1, V_2, \ldots, V_k$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$

$$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \longrightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1\\\vdots\\\lambda_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \xrightarrow{f} \lambda_1 \vec{V}_1 + \ldots \lambda_k V_k \in \mathbb{R}^n$$

Es) Il vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ appartiene allo span dei vettori $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$?

$$f\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Nello spazio a 3 dim, 2 vettori non ba stano x coprire lo spazio, ne servono tre

$$f\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda_2\\\lambda_1+\lambda_2\\2\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} 2\lambda_2 = 0 & \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 1 & \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ 2\lambda_1+\lambda_2 = 1 & \Rightarrow 2+0=1 \end{cases} \Rightarrow$$

NO, il vettore non appartiene allo span dei 2 vettori

Es) Il vettore $\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$ appartiene allo span dei vettori $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \lambda_1\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\lambda_1\\+3\lambda_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda_2\\4\lambda_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\lambda_3\\2\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3\\3\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\lambda_1+\lambda_2-3\lambda_3 = -4 \\ 3\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3 = 5 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 2\lambda_1 + 3\lambda_3 - 4 \to$ lo sostituisco nella 2° equaz.

$$3\lambda_1 + 4(2\lambda_1+3\lambda_3-4) + 2\lambda_3 = 5$$

$$11\lambda_1 + 14\lambda_3 = 21$$

Quindi ho ricavato queste 2 equazioni

$$\begin{cases} \lambda_2 = 2\lambda_1+3\lambda_3-4 \\ 11\lambda_1+14\lambda_3 = 21 \end{cases}$$

Provo a porre $\lambda_3 = 0$

$$\lambda_2 = 2\lambda_1 - 4 \to \lambda_2 = \frac{42}{11} - 4 = -\frac{2}{11}$$

$$11\lambda_1 = 21 \to \lambda_1 = \frac{21}{11}$$

In questi casi si dice che ho 1 grado di libertà (-equaz., +incognite)

Ad es. prendiamo come parametro $\underline{\lambda_3}$

$$\lambda_2 = 2\left(-\frac{14}{11}\lambda_3 + \frac{21}{11}\right) + 3\lambda_3 - 4 = -\frac{28}{11}\lambda_3 + 3\lambda_3 + \frac{42}{11} - 4 = \frac{5}{11}\lambda_3 - \frac{2}{11}$$

$$\lambda_1 = -\frac{14}{11}\lambda_3 + \frac{21}{11}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{5}{11}\lambda_3 - \frac{2}{11} \\ \lambda_1 = -\frac{14}{11}\lambda_3 + \frac{21}{11} \end{cases}$$

al variare di λ_3 trovo ∞ soluzioni

ES I vettori $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$?

Significa: chiedersi se lo span$\left\{\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}$,

cioè se usando solo questi 3 si trovano tutti i vettori

Def. Un insieme di vettori $v_1 \dots v_k$ di $\mathbb{R}^n$ si dice che è un insieme di GENERATORI se Span $\{v_1, \dots, v_k\} = \mathbb{R}^n$

Equivalentemente: $f: \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \circledast$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ SURIETTIVA, cioè x ogni $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ esiste $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

tale che $f\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

(è vero che tutti i vettori stanno nello span? = è vero che questi vettori generano $\mathbb{R}^2$? = è vero che la funzione è suriettiva?)

$\circledast = \begin{pmatrix}2\lambda_2\\4\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3\end{pmatrix}$ Quindi devo vedere se:

$$f\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda_2\\4\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\lambda_2 = a\\4\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = b\end{cases}$$? è risolubile x ogni scelta di $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$?

$\lambda_2 = a/2$

$4\lambda_1 - \frac{a}{2} + \lambda_3 = b$

$$\begin{cases}\lambda_2 = a/2\\\lambda_3 = -4\lambda_1 + a/2 + b\end{cases}$$

$\lambda_1 \to$ parametro libero

ad esempio $\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = a/2$
$\lambda_3 = \frac{a}{2} + b$

Quindi la risposta è SI, perché variando λ_1 si trovano tutti i vettori.

LA BASE

BASE di $\mathbb{R}^n$ = Un insieme di generatori di cardinalità minima
↳ il + piccolo possibile spazio

Con un unico vettore trovo una retta
" 2 vettori genero tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$ = il minimo indispensabile = BASE di $\mathbb{R}^2$

Dire che una base ha 2 elem. è come dire che lo spazio ha 2 dimensioni

ES • Verificare che $\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$

↳ basta controllare che questo genera tutto $\mathbb{R}^2$
→ è di cardinalità minima, x che con 1 non genero $\mathbb{R}^2$

NB. Se è una BASE, x definizione sono GENERATORI
Ma se ho dei GENERATORI, non x forza sono una base

• Verificare che $\left\{\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-8\\2\end{pmatrix}\right\}$ NON è una BASE di $\mathbb{R}^2$

• Verificare che $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$ è una BASE di $\mathbb{R}^3$

RIPASSO....

13/10/2015

APPLICAZIONI LINEARI

$f\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ → combinare in modo lineare dei vettori, in questo caso $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$

<u>Def.</u> Un insieme di 2 vettori $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^2$ si dice base se V_1, V_2 generano tutto $\mathbb{R}^2$ o equivalentemente, se $f\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$ è suriettiva

es. $B = \left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$? Per essere una base devono generare o la f deve essere suriettiva

Verifichiamo che la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita sopra è suriettiva

Prendiamo un generico vettore $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

cerco un vettore $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ t.c. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

Faccio il conto:

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1\\2x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5x_2\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1-5x_2\\2x_1+x_2\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = a \\ x_1 + x_2 = b \end{cases}$$

Se il sistema ha sempre soluz. i 2 vettori formano una base, sennò no. Trovo le soluzioni con la regola di Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}a & -5\\ b & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{vmatrix}} = \frac{a+5b}{13} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix}3 & a\\ 2 & b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{vmatrix}} = \frac{3b-2a}{13}$$

Le soluzioni ci sono sempre

es. Se cerco $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ t.c. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ (a, b)

Risolvo ponendo $x_1 = \frac{-3+35}{13}$ $\quad x_2 = \frac{21+6}{13}$ → $\begin{pmatrix}32/13\\-23/13\end{pmatrix}$

Verifica:

$$f\begin{pmatrix}32/13\\27/13\end{pmatrix} = \frac{32}{13}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \frac{27}{13}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}96/13\\64/13\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-135/13\\27/13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-39/13\\91/13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$$

TEOREMA

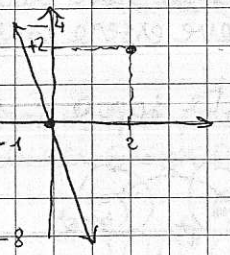
$D=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD-BC \rightarrow$ è il determinante che deve essere $\neq 0$

$B=\left\{\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}\right\}$ è una base se e solo se $AD \neq BC$ (cioè $AD-BC\neq 0$)

es. $B=\left\{\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}\right\}$ è una base?

$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & -8\end{bmatrix} = 8-8=0$ NON È UNA BASE $\begin{cases}\text{non è suriettiva}\\ \text{non genera } \mathbb{R}^2\end{cases}$

$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix} \rightarrow$ NON È SURIETTIVA



→ deve stare sulla retta dei vettori; se ad es. prendo $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ non è verificato

$\Downarrow$

$\begin{cases}-x_1+2x_2=2\\ 4x_1-8x_2=2\end{cases}$ il determinante è zero

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che $AD-BC\neq 0$

Voglio dimostrare che prendendo questi vettori

$B=\left\{\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix},\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}\right\}$ sono una base, cioè che quei due vettori generano $\mathbb{R}^2$, cioè $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}$, cioè posso sempre trovare x_1, x_2 tali che $x_1\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, cioè l'applicazione lineare

$(f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2)$

$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}$ è suriettiva, cioè per ogni $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ il sistema seguente è risolubile

$\begin{cases}Ax_1+Cx_2=a\\ Bx_1+Dx_2=b\end{cases}$ $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

↳ Risolvo $\begin{matrix}B\cdot\\A\cdot\end{matrix}\begin{cases}Ax_1+Cx_2=a\\ Bx_1+Dx_2=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}ABx_1+CBx_2=aB\\ ABx_1+ADx_2=bA\end{cases}$ sottraggo

$// \quad (AD-CB)x_2=bA-aB$

$x_2=\dfrac{bA-aB}{AD-CB}=$

$=\dfrac{\begin{vmatrix}A & a\\ B & b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A & C\\ B & D\end{vmatrix}}$

↳ Ora troviamo x_1

$$D\cdot\begin{cases} Ax_1+Cx_2=a \\ Bx_1+Dx_2=b \end{cases} \cdot C \qquad \begin{cases} ADx_1+CDx_2=a\cdot D \\ CBx_1+CDx_2=b\cdot C \end{cases}$$
$$(AD-BC)x_1 \quad // \quad = aD-bC$$

$$x_1=\frac{aD-bC}{AD-BC}=\frac{\begin{vmatrix} a & C \\ b & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix}}$$

N.B. Possiamo dividere xché per ipotesi $AD-BC\neq 0$

VICEVERSA devo dimostrare che se ci sono sempre le soluzioni allora ($\Rightarrow$) "$AD-BC\neq 0$"

$P\Rightarrow Q$
$\neg P\Rightarrow\neg Q$

Lo dimostro al contrario xché è più facile:

"$AD-BC=0$" $\Rightarrow$ NON sempre ci sono le soluzioni

$$\begin{cases} Ax_1+Cx_2=a \\ Bx_1+Dx_2=b \end{cases} \qquad \text{es. } \begin{cases} -x_1+2x_2= \\ 4x_1-8x_2= \end{cases}$$

$$AD-BC=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Ad esempio, se $A\neq 0$

$$\begin{cases} Ax_1+Cx_2=0 \\ Bx_1+Dx_2=1 \end{cases} \quad \text{IMPOSSIBILE} \rightarrow \quad Ax_1=-Cx_2 \quad x_1=-\frac{C}{A}x_2$$

$$B\left(-\frac{C}{A}x_2\right)+Dx_2=1$$

perché AD-BC avevo detto $=0$

$$\left(-\frac{BC}{A}+D\right)x_2=1 \rightarrow \frac{\cancel{-BC+AD}}{A}x_2=1 \qquad \overset{\shortparallel}{0} \qquad 0=1$$

Se $A=0$

Visto che $AD=BC$ deve essere $BC=0$

II: $B=0$ e $C\neq 0$ $\qquad$ I: $C=0$ e $B\neq 0$

$$\begin{cases} Cx_2=0 \\ Dx_2=1 \end{cases} \rightarrow \text{imposs.} \qquad \begin{cases} \overset{0}{A}x_1+\overset{0}{C}x_1=1 \end{cases} \rightarrow \text{imposs.}$$

ESERCIZIO X CASA:
$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ sono vettori paralleli $\Leftrightarrow AD=BC$

$AD-BC$ si dice DETERMINANTE della matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

AL CONTRARIO

Si parte dal sistema e si torna al concetto di base

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

Trovo l'applicazione lineare corrispondente

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

RISOLUBILE $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, f$ → è uno dei bersagli colpiti?

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\text{MATRICE ASSOCIATA AL SISTEMA:}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

→ vettore dei termini noti

Def. $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ si dice base di $\mathbb{R}^3$ se i vettori v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^3$, cioè se ogni vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ è combinat. lineare di v_1, v_2, v_3, cioè se l'applicazione lineare dove $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ è suriettiva

- $\boxed{\text{EQUAZIONE DI UN PIANO}}$ $\quad aX + bY + cZ = d$

es. $3x - 2y + z = 1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \pi$? $\quad 3 \cdot 1 - 2(-2) + 3 = 1$
$3 + 4 + 3 \neq 1 \rightarrow$ NO

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \pi$ SI

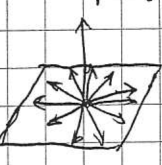
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 3x - 2y + z = 1 \right\}$ → tutti questi punti formano un piano...

Perché?

es. $3x - 5y - 2z = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$

Si parte dal PRODOTTO SCALARE: $3x - 5y - 2z = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ → Tutti i vettori perpendic. ad un vettore prefissato formano un piano



ES Scrivere l'equaz. del piano $\perp$ al vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e passante per il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y - 4z = 0$ → se ci sostituisco $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e torna OK, sennò devo cambiare il termine noto:

$3x + y - 4z = -4$ → ora ci appartiene

es. $\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$ Base di $\mathbb{R}^3$?

Tutti questi vettori $x_1\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}$ appartengono allo stesso piano, quindi NO, non genero tutti i vettori

es. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$\begin{bmatrix}3&5\\-1&-2\\2&0\end{bmatrix}$ → MATRICE 3×2 = corrisponde ad un'applicaz. lineare da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

ES L'applicazione lineare corrispondente alla matrice

$\begin{bmatrix}4&0\\-1&2\\3&1\end{bmatrix}$ è iniettiva? È suriettiva?

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $\quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1\\-x_1+2x_2\\3x_1+x_2\end{pmatrix}$

• NON È SURIETTIVA, perché con 2 vettori non posso generare tutto

• È INIETTIVA? Un'applicazione lineare è INIETTIVA $\Leftrightarrow$ l'unico vettore $\vec{v}$ t.c. $f(\vec{v})=0$ è il vettore $\vec{v}=0$ $\quad f(\vec{v})=0 \overset{?}{\Rightarrow} \vec{v}=0$

N.B. Se f è un'applicazione lineare, $f(\vec{0})=\vec{0}$

$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_1\\-x_1+2x_2\\3x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\overset{?}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}4x_1=0 & \Rightarrow x_1=0\\ -x_1+2x_2=0 \quad \Rightarrow \text{se è così, è iniettiva} & \Rightarrow 2x_2=0\Rightarrow x_2=0\\ 3x_1+x_2=0 & \Rightarrow x_1=0,\ x_2=0\end{cases}$$

L'unica possibilità è $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ → Quindi f è INIETTIVA

ES $\begin{bmatrix}4&-2&1\\2&1&1\end{bmatrix}$ Sia f l'applicaz. lineare associata:
2×3

① f iniettiva? ② f suriettiva?

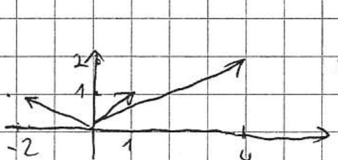
MATRICE $\neq$ APPLICAZIONE LINEARE

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

① f suriettiva? È vero o no che $\left\{\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ generano $\mathbb{R}^2$

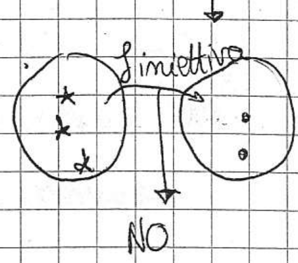
GEOM.



→ SI

$\boxed{OK}$ perché non sono allineati $\quad$ xché $\det\begin{bmatrix}4&-2\\2&1\end{bmatrix}=8\neq0$

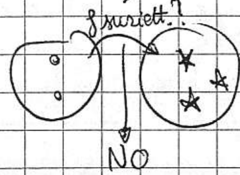
o semmo xché: $B=\left\{\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base e l'importante è che ce ne siano due che fanno una base, ② f è iniettiva? NO, xchè qui $\to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, succede la stessa cosa che qui



→ questa regola la posso usare anche x la SURIETTIVITÀ?

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f$ suriettiva? NO

$\Updownarrow$



O SENNÒ:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = -4x_1 + 2x_2$

$2x_1 + x_2 - 4x_1 + 2x_2 = 0$

$-2x_1 + 3x_2 = 0 \ / \ x_2 = \frac{2}{3}x_1$

$x_3 = -4x_1 + \frac{4}{3}x_1 = -\frac{8}{3}x_1$

$$\begin{cases} x_3 = -\frac{8}{3}x_1 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_1 \end{cases}$$

Ad esempio, se $x_1 = 3$

$x_3 = -8$, $x_2 = 2$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ è soluzione di $(*)$

Verifica $\begin{cases} 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 8 = 0 & \text{OK} \\ 2 \cdot 3 + 2 - 8 = 0 & \text{OK} \end{cases}$