ESERCIZIO

10/11/2015

$$\begin{cases} x+y+2z+t=b_1 \\ 2x+2y+4z+3t=b_2 \\ x+2y+4z+t=b_3 \\ -x-2y-4z+2t=b_4 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) Prendo la MATRICE

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ {}^{*}2 & 2 & 4 & 3 & b_2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & b_3 \\ -1 & -2 & -4 & 2 & b_4 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ APPLICO METODO DI GAUSS

1ª MOSSA: RENDERE 0 (*)

$\Rightarrow$ II riga $-$ 2 I riga
III " $-$ I "
IV " $+$ I "

quelle operazioni consistono nella MATRICE formata dalla matrice IDENTITÀ a cui abbiamo applicato quelle operazioni

(MAT. ID. solo quando ho una matrice quadrata)

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_2-2b_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b_3-b_1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & b_4+b_1 \end{array}\right)}_{=E_1\cdot A}$$

Matrice con II e IV riga scambiate

$$=E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow$$

Scambio II e IV riga

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & b_4+b_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_2-2b \end{array}\right)}_{E_2\cdot E_1\cdot A}$$

$\downarrow$ III riga + II riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 3 & b_4+b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & b_3+b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_2-2b_1 \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow E_3(E_2\cdot E_1\cdot A)$

quindi salto la colonna $\Leftarrow$ NON PIVOT!

(x comodità) scambio III e IV riga

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & b_4+b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b_3+b_4 \end{array}\right) (+)$$

$\xleftarrow{\text{IV riga} - 3\,\text{III}}$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & b_4+b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6b_1-3b_2+b_3+b_4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P & P & L & P \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Poiché non posso applicare il metodo di Jordan, non posso invertire la Matrice.

① $Col(A) \overset{DEF}{\equiv} SPAN \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$Im f_A = \{ \vec{b} : \exists \vec{x} \text{ t.c. } f_A(\vec{x}) = \vec{b} \} = \{ \vec{b} \mid$ il sistema avente $\vec{b}$ come termini noti ha soluzione $\}$

⇒ x il teorema già annunciato lo spazio delle colonne

$Col(A) = Im f_A =$ span {colonne pivot di A !!} ⊛ (matrice all'inizio)

→ NEL NOSTRO CASO

$Im f_A = SPAN \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{●}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ → Devo prendere le colonne della matrice iniziale

⊛ è il sottospazio di dimensione = NUMERO PIVOT

→ attraverso questo teorema bastano le colonne pivot x creare uno spazio (come una BASE)

● Sono la base dell'immagine
↓
= NUMERO MINIMO di VETTORI che mi servono x creare un insieme x es. dell'immagine

② Per quali termini noti il sistema ha soluzione?

Se e solo se $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in Im f_A$

• Dal pto di vista pratico: ← (+)

⇒ Dalla riduzione di Gauss devo avere $6b_1 - 3b_2 + b_3 + b_4 = 0$

Nel nostro caso in cui $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, il sist. ha soluzioni

Perché $6 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ Vero

N.B. Dire che $\vec{b} \in Im f_A \overset{\text{equivale}}{\iff}$ a dire $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{equivale}}{\iff} 6b_1 - 3b_2 + b_3 + b_4 = 0$

<u>TEO</u> $Ker(f_A) \overset{DEF}{\equiv} \{ \vec{x} \mid f_A(\vec{x}) = 0 \} = \{ \vec{x} \mid \vec{x}$ è soluz. del sistema omogeneo associato $\}$
↓

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2y + 4z + 3t = 0 \\ x + 2y + 4z + t = 0 \\ -x - 2y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$$

<u>OSS.</u> f_A INIETTIVA $\overset{\text{TEOREMA}}{\iff} Ker(f_A) = \{0\}$

$\vec{0} \xrightarrow{f} 0$ $\quad \vec{0} \in Ker(f_1)$ SEMPRE

= SPAN {soluz. SPECIALI} è SOTTOSPAZIO di dimensione = n° COLONNE LIBERE

SOLUZIONI SPECIALI:

VARIABILI LIBERE: x_3 $\quad x_3 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x+y+2z+t=0 \\ -y-2z+3t=0 \\ t=0 \\ 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ tutte le soluzioni speciali si trovano così:

- Poniamo $=0$ TUTTE le variabili libere tranne una, che poniamo $=1$

Nel nostro caso porre $x_3 = 1$ $\quad z=1$

$z=1$ $\begin{cases} x+y+2+t=0 \Rightarrow x=0 \\ -y-2+3t=0 \Rightarrow y=-2 \\ t=0 \end{cases}$

$\rightarrow \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ SOLUZIONE SPECIALE

$\text{Ker } f_A = \text{SPAN}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ = multipli del vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

TEOREMA (FINALE)

Tutte e sole le soluzioni del sistema (se esistono) sono $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{v}$ dove $\vec{x}_p$ è una soluzione particolare e $\vec{v} \in \text{Ker}(f_A)$ (SOL SPEC.)

Poniamo la variabile libera $z=0$

$\begin{cases} x+y+t=2 \\ -y+3t=2 \\ t=1 \end{cases}$ $\begin{cases} t=1 \\ -y+3=2 \,/\, y=1 \\ x+1+1=2 \,/\, x=0 \end{cases}$ $\quad \vec{x}_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

l'insieme di tutte le soluzioni è

$$\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1-2\lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

NUMERI COMPLESSI

ES $z^3 = -2|z|^2 = 0$

$z^3 = 2|z|^2$

- x risolvere uso le coordinate polari

$z \rightarrow (\rho, \theta)$ ρ = MODULO θ = ARGOMENTO

⇒ Ricordiamo che $|z|$ era MODULO di z, cioè lunghezza del VETTORE corrispondente

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ con $z = a+ib$

$z \cdot \underbrace{\bar{z}}_{\text{coniugato}} = |z|^2$

$- z^3 \rightarrow (\rho^3, \overbrace{\theta+\theta+\theta}^{3\theta})$

Se moltiplico 2 numeri complessi, i moduli si moltiplicano e gli argomenti si sommano!

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \rho_2, \theta_1+\theta_2) \quad \begin{cases} z_1(\rho_1, \theta_1) \\ z_2(\rho_2, \theta_2) \end{cases}$$

$- 2|z|^2 \rightarrow (2\rho^2, 0) \rightarrow$ NUMERI REALI POSITIVI, hanno argomento $\theta = 0$

NUMERI REALI NEGATIVI hanno $\theta = \pi$

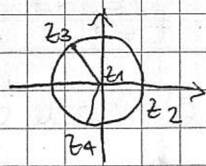
$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 2\rho^2 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho^2(\rho - 2\rho) = 0 \Rightarrow \rho = 0 \vee \rho = 2 \\ \theta = \frac{2}{3}k\pi \end{cases}$$

→ i numeri a dist. 0 dall'origine sono 0 ⇒ $z=0$ è sol.

$\theta = \underset{k=0}{0}, \underset{k=1}{\frac{2}{3}\pi}, \underset{k=2}{\frac{4}{3}\pi}$ CONCLUSIONE: $z_1 = 0$ è sol.

$\rho = 2$ $\rho = 2$ $\rho = 2$

$\underbrace{\theta = 0}_{z_2}$ $\underbrace{\theta = \frac{2}{3}\pi}_{z_3}$ $\underbrace{\theta = \frac{4}{3}\pi}_{z_4}$



$z_1 = 0$ $z = (\rho, \theta)$

$z_2 = 2$ $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$

$z_3 = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$z_4 = 2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

12/11/2015

ESERCIZI

$$② \begin{cases} (z+i)^3 = \bar{z} - i \\ \bar{z}^5 + 4\bar{z} = 0 \end{cases} ①$$

① $\bar{z}^5 + 4\bar{z} = 0$

$w = \bar{z}$ $\quad w^5 + 4w = 0 \quad$ $w = 0 \Rightarrow z = 0$

$w(w^4 + 4) = 0 \quad \rightarrow w^4 + 4 = 0 \Rightarrow w^4 = -4 \qquad z^n = a$

$\Downarrow$

si usano le coordinate polari x risolverlo

⊛ ESPLICITIAMO le SOLUZIONI: $\quad w \rightarrow (\rho, \theta)$

$w_0 = 0,\ w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$

DEVONO COINCIDERE $\begin{cases} w^4 = (\rho^4, 4\theta) \\ -4 = (4, \pi) \end{cases}$

x cui

$\rho^4 = 4 \rightarrow \rho = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

$4\theta = \pi + 2k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$\downarrow$

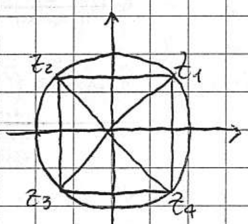
⊛ $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$$\left[\begin{cases} \overset{a}{x} = \rho\cos\theta \\ \qquad z = a + ib \\ \overset{b}{y} = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}\right]$$

$w_2 = -1 + i$

$w_3 = -1 - i$

$w_4 = 1 - i$



- Verifica: $(1-i)^4$

$(1-i)^2 = -2i$

$(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = -4$

AD ESEMPIO (verifico che le soluzioni trovate $\in$ anche al sistema)

$z_1 = 1 - i$ è soluzione del sistema? SOSTITUISCO

$(z+1)^3 = \bar{z} - i$

$[(1 - \cancel{i}) + \cancel{i}]^3 = (1-i) - i$

$1 = 1$ OK

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $z = (\rho, \theta) \Rightarrow \bar{z}(\rho, -\theta)$
- $z = (\rho, \theta) \Rightarrow \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{\rho}, -\theta\right)$

es. inverso di $3i$:

$$\frac{1}{3i} \cdot \frac{-3i}{-3i} = -\frac{i}{3}$$

② $(z+i)^3 = \overline{z} - i$

$w = z + i \Rightarrow \overline{w} = \overline{z} + \overline{i} = \overline{z} - i$

$\boxed{w^3 = \overline{w}}$

$\rho^3 - \rho = 0 \rightarrow \rho(\rho^2 - 1) = 0$

• I MODO

$w = (\rho, \theta)$ $\quad w^3 = (\rho^3, 3\theta)$

$\overline{w} = (\rho, -\theta)$

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho \Rightarrow \rho = 0 \text{ e } \rho = 1 \\ 3\theta = -\theta + 2k\pi \\ 4\theta = 2k\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho = 0 \longrightarrow w = 0$

$\rho = 1 \longrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

$w = 1, i, -1, -i$

$z = -i \qquad z = 1 - i, 0, -1 - i, -2i$

• II MODO: $\boxed{|z|^2 = z \cdot \overline{z}}$

$w^3 = \overline{w} \Rightarrow w^4 = \overline{w} \cdot w$ $\qquad w = (\rho, \theta)$

$w = 0$ $\qquad w^4 = (\rho^4, 4\theta)$

$|w|^2 = \rho^2 = (\rho^2, 0)$ NUMERO REALE POSITIVO

$$\begin{cases} \rho^4 = \rho^2 \\ 4\theta = 0 + 2k\pi \end{cases}$$

ESERCIZIO:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = b_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = b_3 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 = b_4 \end{cases}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \\ -x_1 - 2x_2 + (k-4)x_3 + 2x_4 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ k-4 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

⊛

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & k-4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV} + \text{I}]{\text{II} - \text{I},\ \text{III} - 2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & k-2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} + \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & k & 3 \end{pmatrix}$$

• Se $k = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} - \frac{1}{3}\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\quad\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$
$\quad P\ \ P\ \ L\ \ P$

Dimensione $(\text{Im}) = 3$

Dim $(\text{Ker}) = 1$

$$\text{Im}(f_A) = \text{SPAN}\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{BASE}}$$

Si pongono tutte le variabili libere $= 0$ a parte una; qui dato che ne ho solo una la pongo $= 1$

//

VARIABILE LIBERA $x_3=1$

Per calcolare il nucleo a dx devo avere sempre 0 $\rightarrow$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \Rightarrow x_1-2+2+0 \Rightarrow x_1=0 \\ x_2+2x_3=0 \Rightarrow x_2+2=0 \Rightarrow x_2=-2 \\ x_4=0 \Rightarrow x_4=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{S}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ NUCLEO = SPAN SOLUZIONI SPECIALI $\Leftarrow$

$$\operatorname{Ker} f_A = \text{SPAN}\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}}_{\text{BASE}}$$

- Se $K\neq 0$

$$\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&K&3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&1&2&0\\0&0&K&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

4 Pivot = MATRICE INVERTIBILE

$\Downarrow$

F_A è biunivoca per cui il sistema ha sempre un'unica soluz. $\forall$ scelta di termini noti

ESERCIZIO (cerco la matrice inversa)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&2&1&1&0&0&0\\1&2&4&1&0&1&0&0\\2&2&4&3&0&0&1&0\\-1&-2&K-4&2&0&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{prima (*)}]{\text{Faccio le stesse operaz. di}} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&2&0&-1&1&0&0\\0&0&0&1&-2&0&1&0\\0&-1&K-2&3&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&2&0&-1&0&0&0\\0&0&0&1&-2&0&1&0\\0&0&K&3&0&1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{sostituisco III e IV riga}} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&2&1&1&0&0&0\\0&1&2&0&-1&1&0&0\\0&0&K&3&0&1&0&1\\0&0&0&1&-2&0&1&0\end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{I}-1\text{IV}]{\text{III}-3\text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&2&0&3&0&-1&0\\0&1&2&0&-1&1&0&0\\0&0&K&0&6&1&-3&1\\0&0&0&1&-2&0&1&0\end{array}\right) \xrightarrow{\text{moltiplico per K la I e la II riga}} \frac{1}{K^2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}K&K&2K&0&3K&0&-K&0\\0&K&2K&0&-K&K&0&0\\0&0&K&0&6&1&-3&1\\0&0&0&1&-2&0&1&0\end{array}\right) \longrightarrow$$

x ottenere quella inversa devo far venire a sx la matrice identità

$$\xrightarrow[\text{I}-2\text{III}]{\text{II}-2\text{III}} \frac{1}{K^2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}K&K&0&0&3K-12&-2&-K+6&-2\\0&K&0&0&-K-12&K-2&+6&-2\\0&0&K&0&6&1&-3&1\\0&0&0&1&-2&0&1&0\end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \frac{1}{K^2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}K&0&0&0&4K&-K&-K&0\\0&K&0&0&-K+2&K-2&6&-2\\0&0&K&0&6&1&-3&1\\0&0&0&K&-2&0&1&0\end{array}\right) \longrightarrow \frac{K}{K^2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&4&-1&-1&0\\0&1&0&0&-K+12&K-2&6/K&-2/K\\0&0&1&0&6/K&1/K&-3/K&1/K\\0&0&0&1&-2&0&1&0\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{K}\begin{pmatrix}4&-1&-1&0\\-K-12&K-2&6&2\\6&1&-3&1\\-2&0&1&0\end{pmatrix}$$

17/11/2015

- APPLICAZIONE LINEARE:

es. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ COMBINAZIONI LINEARI DI VETTORI $\mathbb{R}^3$

PROPRIETÀ

① Preso un vettore sommato con un altro

$$f(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = f(\vec{V_1}) + f(\vec{V_2})$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{SOMMO}$$

ho verificato:

$$(1+2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1+1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (0+1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + (2+0)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{W_1} + \dots + x_n\vec{W_n} \quad \text{dove } \vec{W_1} \dots \vec{W_n} \in \mathbb{R}^m$$

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{V_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = (x_1+y_1)\cdot\vec{W_1} + \dots + (x_n+y_n)\vec{W_n}$$

$$f(\vec{V_1}) = x_1\vec{W_1} + \dots + x_n\vec{W_n} \qquad f(\vec{V_2}) = y_1\vec{W_1} + \dots + y_n\vec{W_n}$$

② $f(\lambda \cdot \vec{V}) = \lambda f(\vec{V})$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow f\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5\, f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad f(\lambda \cdot \vec{V}) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\lambda x_1\vec{W_1} + \dots + \lambda x_n\vec{W_n} = \lambda(x_1\vec{W_1} + \dots + x_n\vec{W_n}) = \lambda \cdot f(\vec{V})$$

DEF

$\Rightarrow$ un'appl. lineare è tale se soddisfa la PROPRIETÀ ① e ②

$\{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice APPL. LINEARE se VALGONO prop. ① e ② $\}$

DEF. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'appl. lineare se soddisfa:

① $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

② $f(\lambda \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$

- abbiamo verificato che tutte le funzioni del tipo

$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{w}_1 + \dots + x_n \vec{w}_n$ sono in effetti applicazioni lineari

ES

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ applicazione lineare

$$\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$f\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = f\left(7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

f è APPL. LINEARE ① $f\left(7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(-4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + f\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\underset{②}{=} 7 \cdot f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\left(f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 3\left(f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

IN GENERALE

se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ APPL. LINEARE

allora $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{w}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{w}_n$ dove $\vec{w}_1 = f(\vec{e}_1), \dots, \vec{w}_n = f(\vec{e}_n)$

$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ etc.

CONCLUSIONE

Una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una APPL. LINEARE se e solo se f è la funzione associata al sist. lineare in n incognite e m equazioni

PROPOSIZIONE

Sia f un'appl. lineare. Allora • $f(\vec{0}) = \vec{0}$

DIM

Prendo un vettore qualunque $\vec{v}$

$$f(\vec{0}) = f(\vec{v} - \vec{v}) \underset{①}{=} f(\vec{v}) + f(-\vec{v}) \underset{②}{=} f(\vec{v}) - 1 f(\vec{v}) = f(\vec{v}) - f(\vec{v}) = \vec{0}$$

TEOREMA

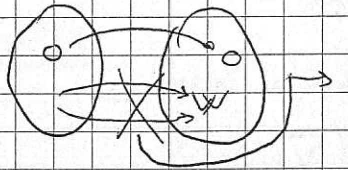
Sia f un'appl. lineare ALLORA f è INIETTIVA $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$

$$\mathrm{Ker} f \overset{DEF.}{=} \{ \vec{v} \mid f(\vec{v}) = 0 \} = \left\{ \begin{array}{l} \text{soluz. del sistema omogeneo} \\ \text{associato che corrisp. a } f \end{array} \right\}$$

DIM

Intanto succede sempre che $\vec{0} \in Ker$

Infatti $\vec{0} \in Ker$ e nessun altro vettore $\vec{v} \neq 0$ può appartenere al nucleo altrimenti avrò che $f(0) = f(\vec{v}) = \vec{0}$ e f NON sarebbe INIETTIVA



con le appl. lineari
questo non succede

$\Rightarrow$ devo dim. che se f si comporta come una funzione iniettiva in 0 allora è iniettiva "ovunque".

$\rightarrow$ Ricordiamo che una funzione g è INIETTIVA se vale: $g(a) = g(b) \Rightarrow a = b$

NEL NOSTRO CASO supponiamo $f(\vec{v_1}) = f(\vec{v_2})$ dunque $f(\vec{v_1}) - f(\vec{v_2}) = 0$

Siccome l'appl. lineare $f(\vec{v_1} - \vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) - f(\vec{v_2}) = 0$

$\times$ IPOTESI: $\vec{v_1} - \vec{v_2} = 0$, cioè $\vec{v_1} = \vec{v_2}$

dunque $\vec{v_1} - \vec{v_2} \in Ker f \Rightarrow$ ma in $Ker f$ c'è solo 0!

CONSEGUENZA: il sist. lineare non ha mai + di una soluzione ($\rightarrow$ o ha $\emptyset$ o ce ne ha 1)

$\Leftrightarrow$ l'APPL. LINEARE corrispondente f è iniettiva

$\overset{\times TEOR}{\Leftrightarrow}$ $Ker f = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ il SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO ha come unica soluzione la soluzione $x_1 = x_2 = 0$

=

se non ho alcuna COLONNA LIBERA

e ha per dimensione 0

$\Leftrightarrow$ NESSUNA COLONNA LIBERA

=

TUTTE COLONNE PIVOT

(se) il sist. è quadrato e ha tutte colonne pivot ho sicuramente soluzione

(se) non è quadrato non è detto che abbia soluzione anche con tutte colonne pivot

TEOREMA $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ APPL. LINEARE

Abbiamo visto che $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 f(\vec{e_1}) + \ldots + x_m f_m(\vec{e_m})$

La matrice associata rispetto alla base canonica $B = \{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_m}\}$ è $A = \left(f(\vec{e_1}) | \ldots | f(\vec{e_m})\right)$

$\dim(Ker f)$ = NUMERO COLONNE LIBERE

$\dim(Im f) = \dim(Col(A))$ = NUMERO COLONNE PIVOT

$Im f = SPAN\{f(\vec{e_1}), \ldots, f(\vec{e_m})\} = Col(A)$

TEOREMA Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ appl. lineare

Allora $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = m$

N.B. $\operatorname{Ker} f \subseteq \mathbb{R}^m$ es. $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ appl. lineare suriettiva

$\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^n$ Che dimensione ha $\operatorname{Ker} f$? 2

19/11/2015

SOTTOSPAZI DI SPAZI VETTORIALI

$\mathbb{R}^n$ sono spazi vettoriali

- $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ applicazione lineare

$\operatorname{Im} f = \{ f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^m \}$

$\vec{b} \in \operatorname{Im} f \iff$ il sist. lineare corrispondente ad f ha soluzioni quando $\vec{b}$ è la colonna dei termini noti

$\underline{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$

$\Updownarrow$

$\vec{b} \in \operatorname{Im} f_A$ Verifichiamo che $\operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{Col}(A)$

$$A = \left[f(e_1) \middle| \dots \middle| f(e_m) \right]$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 = b_3 \end{cases}$$

$$f_A(\vec{e}_1) = f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_A(\vec{e}_2) = f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ ecc.} \qquad f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A \cdot \vec{e}_1 = 1^a$ colonna, $A \cdot \vec{e}_2 = 2^a$ col. ecc...

La matrice associata ad un appl. lineare f è la matrice che ha come colonne le immagini dei vettori della base canonica, cioè

$$A = \left(f(\vec{e}_1) \middle| f(\vec{e}_2) \middle| \dots\dots \middle| f(\vec{e}_m) \right)$$

TEOREMA $\operatorname{Im} f_A = \operatorname{Col}(A)$

$\operatorname{Col}(A) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Span}\{\text{colonne di } A\}$

$= \operatorname{span}\{ f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m) \} \overset{?}{=} \operatorname{Im} f_A$

DIMOSTRAZIONE Prendo $\vec{v} \in \text{span}\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m)\}$, allora ②

existono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ t.c. $\vec{v} = \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_m f(\vec{e}_m) =$ (visto che f è appl. lin.) $=$

$$= f(\lambda_1 \vec{e}_1) + \dots + f(\lambda_m \vec{e}_m) \underset{①}{=} f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_m \vec{e}_m) \in \text{Im} f$$

→ $\supseteq$ Prendo $\vec{w} \in \text{Im} f$. Devo dimostrare che $\vec{w} \in \text{span}\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m)\}$

Per definiz. di immagine esiste $\vec{v}$ t.c. $f(\vec{v}) = \vec{w}$

Se $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_m \vec{e}_m$ es. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2 + 7\vec{e}_3$

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_m \vec{e}_m) = (f \text{ appl. lineare}) =$$
$$= \lambda_1 f(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_m f(\vec{e}_m) \in \text{span}\{f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m)\} = \text{Col}(A)$$

~~CHIEDERE~~

① $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

② $w \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

N.B. $\vec{0} \in W$

Se W è un sottospazio allora deve contenere $\vec{0}$

Prendendo un qualunque $\vec{w} \in W$, e $\lambda = 0$, allora $\lambda \vec{w} = \vec{0} \in W$

TEOREMA Sia $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ appl. lineare

① $\text{Ker}(f)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$

② $\text{Im}(f)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

$\text{Ker} f = \{v \mid f(\vec{v}) = 0\}$

DIMOSTRAZIONE ① $\vec{0} \in \text{Ker} f$ perché $f(\vec{0}) = \vec{0}$

Prendo $w_1, w_2 \in \text{Ker} f$. Voglio dimostrare che $w_1 + w_2 \in \text{Ker} f$,

cioè che $f(w_1 + w_2) = 0$ ⇒ Ma questo è vero perché

$$f(w_1 + w_2) \underset{\substack{\text{visto che} \\ f \text{ appl. lin.}}}{=} f(w_1) + f(w_2) \underset{\substack{\text{xché } w_1, w_2 \\ \in \text{Ker} f}}{=} \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Se $w \in \text{Ker} f$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, voglio dimostrare che $\lambda \cdot w \in \text{Ker} f$

Questo è vero perché $f(\lambda \cdot \vec{w}) = \lambda \cdot f(\vec{w}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

② $\vec{0} \in \text{Im} f$? SÌ $\quad f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Im} f$?

Perché $f(\vec{0}) = \vec{0}$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$w_1, w_2 \in \text{Im} f$. Voglio dimostrare che $w_1 + w_2 \in \text{Im} f$ ⟶

→ Per def. di immagine, esistono $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ tali che $f(\vec{v}_1)=\vec{w}_1$ e $f(\vec{w}_2)=\vec{w}_2$

$w_1+w_2 = f(\vec{v}_1)+f(v_2) = f(\vec{v}_1+\vec{v}_2) \in \mathrm{Im} f$

$w \in \mathrm{Im} f$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Devo vedere che $\lambda \cdot \vec{w} \in \mathrm{Im} f$

Per def. di immagine, esiste $\vec{v}$ t.c. $f(\vec{v}) = \vec{w}$

$\lambda \cdot \vec{w} = \lambda \cdot f(\vec{v}) = f(\lambda \cdot \vec{v}) \in \mathrm{Im} f$

$f\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \longrightarrow f\begin{pmatrix}4\\10\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ FINE DIMOSTRAZIONE

ES
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4 = b_1 \\ 2x_1+4x_2+3x_3+7x_4 = b_2 \\ x_3+x_4+x_5+x_6 = b_3 \\ x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5+x_6 = b_4 \\ x_4+x_5+x_6 = b_5 \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5 \quad \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_6\end{pmatrix} \xmapsto{f} x_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \dots + x_6\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1&2&1&3&0&0\\ 2&4&3&7&0&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 1&2&1&2&1&1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \underset{E_1}{} \begin{pmatrix} 1&2&1&3&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&-1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \underset{E_2}{} \begin{pmatrix} 1&2&1&3&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&-1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

P. L.

$$\xrightarrow[\text{III e IV}]{\text{scambio}} \underset{E_3}{} \begin{pmatrix} 1&2&1&3&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \underset{E_4}{} \begin{pmatrix} 1&2&1&3&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&2&2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{V}-2\text{IV}} \underset{E_5}{} \begin{pmatrix} 1&2&1&3&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&-1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = S$$

MATRICE A SCALA

$\mathrm{Ker}(A) = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{0}\} \overset{\text{Teor.}}{=} \mathrm{span}\{\text{sol. speciale}\}$

Vero o falso? $\mathrm{Ker}(A) \overset{?}{=} \mathrm{Ker}(S)$ VERO

Le matrici corrispondenti alle mosse di Gauss sono quadrate (m righe x m righe) e sono invertibili

DIM $S = E_5 \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot (E_1 \cdot A)$

$S = E \cdot A$

Se $\vec{v} \in \mathrm{Ker} A$, allora $A \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \underbrace{E \cdot A}\vec{v} = E \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$S \cdot \vec{v} = \vec{0}$, cioè $\vec{v} \in \mathrm{Ker} S$

$\supseteq$ Prendo $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(S)$, cioè $S \cdot \vec{v} = \vec{0}$, cioè $E \cdot (A \cdot \vec{v}) = \vec{0}$,

cioè $A\vec{v} \in \mathrm{Ker} E \Rightarrow A \cdot \vec{v} = 0$, cioè $\vec{v} \in \mathrm{Ker} A$

$\rightarrow E \cdot \vec{w} = \vec{0} \overset{?}{\Rightarrow} \vec{w} = 0$ DI SOLITO NO!

TEOREMA 1

23/11/2015

$\ker(A) =$ ~~...~~ l'insieme delle soluz. del sistema omogeneo associato (è un sottospazio)

$\ker f(A) = \text{SPAN}\{\text{SOLUZ. SPECIALI}\}$

dim: LE SOLUZ. SPECIALI SONO NEL NUCLEO, INFATTI SE $\vec{S}$ È SOLUZ SPECIALE $R\cdot\vec{S}=\vec{0}$ (R È LA MATRICE RIDOTTA) QUINDI $\vec{S} \in \ker(f_R)$ MA ALLORA appartiene ANCHE A $\ker(f(A))$ - HO VISTO CHE LE SOLUZ. SPECIALI STANNO NEL NUCLEO, ORA DIMOSTRO CHE SE FACCIO UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE SOLUZIONI SPECIALI ANCHE QUESTA STA NEL NUCLEO → VERO PERCHÉ IL KER È UN SOTTOSPAZIO E QUINDI SE FACCIO UNA COMBINAZ. LINEARE PURE QUESTA STA NEL SOTTOSPAZIO

PRENDO UN GENERICO $\vec{v} = d_1 f(\vec{S_1}) + \ldots + d_n f(\vec{S_n})$ $\in \text{span}\{\text{soluz. speciali}\}$

$$f(\vec{v}) = f(d_1\vec{S_1} + \ldots + d_n\vec{S_n}) = d_1\underbrace{f(\vec{S_1})}_{=\vec{0}} + \ldots + d_n\underbrace{f(\vec{S_n})}_{=\vec{0}} = \vec{0}$$

QUINDI HO DIMOSTRATO CHE TUTTE LE COMBINAZ. LINEARI CHE STANNO NELLO SPAN{SOLUZ. SPECIALI} STANNO ANCHE NEL NUCLEO.

ORA DEVO DIMOSTRARE CHE NEL NUCLEO CI STIANO TUTTI E ~~SOLO~~ I VETTORI ~~...~~ CHE STANNO NELLO SPAN, cioè devo dimostrare che SE $\vec{v} \in \ker f_A$ ALLORA $\vec{v} \in \text{span}\{\text{soluz. speciali}\}$

Facciamo un esempio

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0 \\ x_3+x_4=0 \\ -x_4+x_5+x_6=0 \\ x_5+x_6=0 \end{cases} \quad \boxed{x_1=-2x_2} \quad \boxed{x_3=0} \quad \boxed{x_4=0} \quad \boxed{x_5=-x_6}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ -x_6 \\ x_6 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{span}\{S_1, S_2\}$$

pensiamo alle variabili libere x_2 e x_6 come parametri.

TEO 2

$\underbrace{Col(A) = Im(f_A)}_{\text{QSI È GIÀ STATO DIMOSTRATO}} = Span\{\text{colonne pivot di } A\}$

Ora devo dimostrare che $Span\{\text{colonne pivot di } A\} = Col(A)$

Prendiamo una matrice ridotta:

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & l & p & p & l & p \end{matrix}\end{array}$$

(le colonne libere sono combinaz. lineare delle colonne pivot precedenti)

↓

dunque

$Col(S) = Span\{\text{colonne pivot}\}$

Ragionando in modo simile a prima si dimostra che la stessa proprietà vale anche per le colonne della matrice iniziale, cioè lo $span\{\text{colonne pivot } A\} = Col(A)$

24/11/2015

(*) TEOREMA 1: $Ker(f_A) = span\{soluz. speciali\}$

TEOREMA 2: $Col(A) = Im(f_A) = Span\{colonne\ pivot\ A\}$

TEOREMA 3 (FINALE): $A\vec{x} = \vec{b}$ ha come soluzioni tutti e soli i vettori $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{v}$

dove $\vec{x}_P$ è una soluz. particolare fissata e $\vec{v} \in Ker f_A$

(*) Le soluz. speciali sono nel $Ker(f_A)$

Infatti se $\vec{s}$ è soluz. speciale $A\vec{s} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{riduz.} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P & L & P & P & P & L \end{matrix} \end{array} = S$$

Soluzioni speciali

Variabili libere x_2, x_6

① $x_2 = 1 \qquad x_6 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ -x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 + 2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ -x_4 + x_5 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix}$$

sol. spec. $\leftarrow \quad \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $x_2 = 0 \qquad x_6 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ -x_4 + x_5 + 1 = 0 \\ x_5 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = -1 \end{matrix}$$

Infatti se $\vec{s}$ è soluz. speciale $R \cdot \vec{s} = 0$ (R è la matrice ridotta)

Ma allora anche $A \cdot \vec{s} = 0$ e quindi $\vec{s} \in Ker(f_A)$

Voglio dimostrare che $span\{sol. spec.\} \subseteq Ker(f_A)$

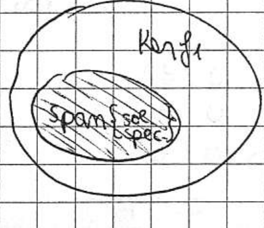
es. $S\cdot\vec{s}_1=\vec{0}$ e $S\cdot\vec{s}_2=\vec{0}$ e quindi anche

La volta scorsa: $Ker(A)=Ker(S)$

$A\vec{s}_1=0$ e $A\cdot\vec{s}_2=\vec{0}$, cioè $\vec{s}_1,\vec{s}_2\in Ker(f_A)$

Voglio dimostrare che anche $\lambda_1\vec{s}_1+\lambda_2\vec{s}_2\in Ker(f_A)$

Ad es. $3\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\3\\0\\0\\4\\-4\end{pmatrix}\in Ker(f_A)$



MOTIVO: $Ker(f_A)$ è un SOTTOSPAZIO

$f_A(3\vec{s}_1-4\vec{s}_2)=3\cdot\underbrace{f_A(\vec{s}_1)}_{=\vec{0}}-4\underbrace{f_A(\vec{s}_2)}_{=\vec{0}}=\vec{0}$

APPL. LINEARE

Prendo un generico $\vec{v}=\lambda_1\vec{s}_1+\dots+\lambda_m\vec{s}_m\in span\{sol.\ spec.\}$

$f_A(\vec{v})=f(\lambda_1\vec{s}_1+\dots+\lambda_m\vec{s}_m)=\lambda_1\underbrace{f(\vec{s}_1)}_{\vec{0}}+\dots+\lambda_m\underbrace{f(\vec{s}_m)}_{\vec{0}}=\vec{0}$

Resta da dimostrare che $\vec{v}\in Ker f_A$ allora $\vec{v}\in span\{sol. spec.\}$

cioè $\vec{v}$ è combinaz. lineare delle soluz. speciali

Quindi utilizzo le variabili libere come parametri e li porto a dx

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+3x_4=0\\x_3+x_4=0\\-x_4+x_5+x_6=0\\x_5+x_6=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_3=0\\x_4=0\\x_5=-x_6\end{cases}$$

i vettori del nucleo hanno tutti la forma $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2x_2\\x_2\\0\\0\\-x_6\\x_6\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_6\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\rightarrow\in span\{\vec{s}_1,\vec{s}_2\}$

$\Rightarrow$ quindi prendendo un vettore qualunque $\in Ker(f_A)$ è sicuramente combinazione lineare delle soluzioni speciali $=\in span\{sol. spec.\}$

TEOREMA 3: DIMOSTRAZIONE

Sia $\vec{x}_p$ una sol particolare e sia $\vec{v}\in Ker(f_A)$

Quindi $A\vec{x}_p=\vec{b}$, e $A\cdot\vec{v}=\vec{0}$

$A(\vec{x}_p+\vec{v})=A\cdot\vec{x}_p+A\cdot\vec{v}=\vec{b}+\vec{0}=\vec{b}$

Viceversa, supponiamo che $\vec{x}$ sia soluzione, cioè $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$

Voglio dimostrare che $\vec{x}=\vec{x}_p+\vec{v}$ per un certo $\vec{v}\in Ker(f_A)$

Basta prendere $\vec{v}=(\vec{x}-\vec{x}_p)$. Quindi banalmente $\vec{x}_p+\vec{v}=\vec{x}$

Inoltre $\vec{v}\in Ker f_A$ perché $A\vec{v}=A(\vec{x}-\vec{x}_p)=A\vec{x}-A\vec{x}_p=\vec{b}-\vec{b}=\vec{0}$

MATRICI INVERTIBILI

A è invertibile a sx se esiste B t.c. $BA = I \Leftrightarrow f_A$ è INIETTIVA $f_B \circ f_A = id$

A " " " dx " " C t.c. $AC = I \Leftrightarrow f_A$ è SURIETTIVA

A " " se esiste $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ (solo quando A è quadrata)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vettore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f_A)$, quindi $Ker(f_A) \neq \{0\} \Leftrightarrow f_A$ NON è INIETTIVA $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ A NON HA inversa sinistra

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & -8 \\ -3 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker f_A \Rightarrow f_A \text{ NON INIETTIVA} \Leftrightarrow A \text{ non ha INVERSA SINISTRA}$$

RICORDARE CHE: una matrice quadrata ha inversa sx $\Leftrightarrow$ ha inversa dx $\Leftrightarrow$ È INVERTIBILE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Una riga di zeri

$A_{2\times3}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ B$ → si può calcolare solo se B ha 3 righe

A·B ha senso se

n° colonne di A = n° righe di B

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $f_B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times3}$ Se B è inversa dx, allora B deve essere 3X2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $f_A \circ f_B = f_{AB} = id$

Se C è inversa sx, allora C deve essere 2X3

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $f_C \circ f_A = f_{CA} = id$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Impossibile perché A non può avere inversa sx, perché f_A non può essere iniettiva

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 2I} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$\quad$ P P L

n° delle colonne pivot ≤ n° righe, cioè al numero di equazioni

x_3 variabile libera: trovo la soluz. spec. ponendo $x_3 = 1$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = 0$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker f_A$, quindi non è iniettiva,

quindi A non ha inversa sx.

continuo delle matrici invertibili

26/11/2015

- Se una matrice ha una colonna di zeri allora non è invertibile a SX
- Se una matrice ha una riga di zeri allora non è invertibile a dx

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \end{pmatrix}$$

Infatti per ogni B, $A \cdot B$ è una matrice che ha tutti zeri nella stessa riga dove A aveva tutti zeri.

Infatti: $(AB)^{-1} = ?$ Cerco una matrice C

$A \cdot B$

$f_A \circ f_B$ t.c. $C \cdot (AB) = (AB)C = I$ → matrice identità

$$\left[\mathbb{R}^n \underset{f_B^{-1}}{\overset{f_B}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^m \underset{f_A^{-1}}{\overset{f_A}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n \quad (f_A \circ f_B)^{-1} = f_B^{-1} \circ f_B^{-1} \right]$$

Prendo $C = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow C(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$; Analogamente: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$

Es. La composizione di 2 suriettive è suriettiva?

Se A e B hanno inverse destre è vero che (AB) ha inversa destra?

Stesse domande dove si considera "iniettiva" al posto di "suriettiva" e inversa "SX" invece di inversa dx.

MATRICE DIAGONALE

DIAGONALE = fuori dalla diagonale tutti 0

$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ $d_1 \ldots d_n \neq 0$

DIM $\Leftarrow$ se $d_1 \ldots d_n \neq 0$, cioè ogni $d_i \neq 0$ $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_n \end{pmatrix}$

es. $$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DIM Se per assurdo: $\quad P \Rightarrow Q \quad \neg P \Rightarrow \neg Q$

$d_1 \ldots d_n = 0$, allora esisterebbe un numero $d_i = 0$. Ma allora la i-esima riga ed anche la i-esima colonna è fatta tutta di zeri. Quindi non è INVERTIBILE

VERO O FALSO?

- $Col(A \cdot B) \subseteq Col(B)$ → riscriverle così → $Im(f_A \circ f_B) \subseteq Im(f_B)$ etc.
- $Col(A \cdot B) \subseteq Col(A)$
- $Ker(A \cdot B) \supseteq Ker(A)$
- $Ker(A \cdot B) \supseteq Ker(B)$

DEF. Se V è un sottospazio, diciamo che

$v_1, \dots, v_m \in V$ GENERANO V (o diciamo che

$\{v_1 - v_m\}$ è un insieme di generatori di V) se $\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_m\} = V$

es. I vettori colonna di una matrice A generano $Col(A)$

es. Le sol. speciali $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k$ generano $Ker(A) = \mathrm{span}\{\vec{s}_1 - \vec{s}_k\}$

- $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3} \right\}$ è un insieme di generatori   es. $\begin{pmatrix}5\\7\\-2\end{pmatrix} = 5 \cdot e_1 + 7 \cdot e_2 - 2 e_3$

es. $\mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$ GENERATORI? È vero (o no) che ogni vettore $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ è nello span $\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$,

cioè $\exists\ \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$?

È la stessa cosa di fare: $\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = b_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = b_2 \end{cases}$ ha soluz. $\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}$?

es. $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} \in \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$?

Esistono λ_1 e λ_2 t.c. $\lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}$ risolvono $\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -3 \end{cases}$

Vero $\iff$ la matrice ha solo colonne pivot $\iff \det A = ad - bc \neq 0$

- Due vettori $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ generano tutto $\mathbb{R}^2 \iff \begin{pmatrix}v_1 & w_1\\v_2 & w_2\end{pmatrix}$ ha determinante $\neq 0$,

cioè $v_1 w_2 - w_1 v_2 \neq 0$

RICORDARE CHE $\det\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = ad - bc$

es. $\left\{ \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \right\}$ generano $\mathbb{R}^2$? $\iff$ per ogni $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ il seguente sistema è risolubile? $\begin{cases} x_1 + \quad + 3x_3 = b_1 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = b_2 \end{cases}$

$x_1 \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è suriettiva cioè $Im f = \mathbb{R}^2$

$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\5 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{II - 5I} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -13\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}P & P & L\end{matrix}\end{array}$$

Per il teorema 2: $Im f_A = Col(A) = \mathrm{span}\{\text{colonne pivot}\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} \stackrel{?}{=} \mathbb{R}^2$

- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^3$?

Per ogni $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ trovo sempre λ_1,λ_2 t.c. $f\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$?

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ è suriettiva?

$$\begin{cases} x_1-x_2=b_1 \\ 2x_1+x_2=b_2 \\ 3x_1+2x_2=b_3\end{cases}$$ ha soluz. per ogni $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$?

NO $\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[III-3I]{II-2I}\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\\0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{III-\frac{5}{3}II}\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\\0&0\end{pmatrix}$

Se una matrice ha una riga di zeri, allora non ha inversa dx, dunque l'applicazione lineare corrispondente NON è suriettiva

$\begin{pmatrix}1&-1\\0&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{cases}x_1-x_2=0\\3x_2=0\\0=1\end{cases}$ $\not\exists$

Conclusione: in generale si dimostra che nessuna applicazione lineare $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ dove $m<n$ può essere suriettiva

Di conseguenza se prendo m vettori di $\mathbb{R}^n$ e $m<n$ allora quei vettori non generano $\mathbb{R}^n$

Qual è il num. minimo di generatori per $\mathbb{R}^n$?

- I vettori $e_1,\dots,e_n$ della base canonica generano tutto $\mathbb{R}^n$
- Se prendo $m<n$ vettori, questi non generano (vedi sopra).

$\boxed{\text{DEF}}$ Un insieme di vettori $\{v_1,\dots,v_m\}$ si dice linearmente indipendente se ogni vettore v_i NON appartiene allo span degli altri

→ sui libri → $\{v_1,\dots,v_m\}$ sono L.I. → linearmente indipendenti

Se $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_m v_m=0 \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_m=0$

es. $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}$ sono L.I. o no? $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$?

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\3x_1-2x_2+8x_3=0\\2x_1-3x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0?$$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in \operatorname{Ker} A \overset{?}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ Mi sto chiedendo se è vero o no che $\operatorname{Ker} A=\{\vec{0}\}\iff f_A$ è INIETTIVA

$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&2&8\\2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[III-2I]{II-3I}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&5&5\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{III+\frac{1}{5}II}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&5&5\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{span}\{\vec{s_1}\}\neq\{\vec{0}\}$

CONCLUSIONE $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}$ sono DIPENDENTI e $2\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\8\\1\end{pmatrix}\in\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\}$

30/11/2015

→ Sono proprietà equivalenti dei vettori $v_1, \dots, v_m$ non zero

① Nessun v_i è combinazione lineare degli altri, cioè $v_i \notin span(\{v_1, \dots, v_m\} \setminus \{v_i\})$ $i = 1, \dots, m$

② $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$

}$v_1, \dots, v_m$ sono vettori LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\boxed{\text{DIM}}$ $(1) \Rightarrow (2)$ Per "contronominale" mostriamo che $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$. Supponiamo dunque che (esistano $\lambda_1 \dots \lambda_m$ t.c.) $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ dove non tutti i $\lambda_i = 0$

Prendiamo $\lambda_i \neq 0$ e divido tutto per λ_i:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + v_i + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_i} v_m = 0$$

$$\Rightarrow v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} v_m \in span(\{v_1, \dots, v_m\} \setminus \{v_i\})$$

v_i è comb. lin. degli altri, cioè $\neg(1)$

$(2) \Rightarrow (1)$ Per "contronominale", supponiamo che esista v_i comb. lin. degli altri, cioè $v_i = \mu_1 v_1 + \dots \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_m v_m$.

Ma allora $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} - v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_m v_m = 0$

è una combinaz. lineare $= 0$ dove non tutti i coefficienti sono zero, quindi $\neg(1)$

ES $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}$ sono indipendenti? NO

$v_3 = v_1 + v_2$, dunque $v_3 \in span\{v_1, v_2\}$

Allora $\{v_1, v_2, v_3\}$ NON sono indipendenti

→ METODO GENERALE PER SCOPRIRE L'INDIPENDENZA O MENO DI VETTORI

- Si considera la matrice che ha quei vettori come colonne:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Supponiamo $\boxed{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La risposta è SÌ se e solo se $\ker A = \{0\}$

- CONCLUSIONE: A matrice che ha i vettori $v_1, \dots, v_m$ come colonne

$\{v_1, \dots, v_m\}$ sono L.I. $\Leftrightarrow \ker A = \{0\} \Leftrightarrow$ tutte le colonne

sono colonne pivot (NON esistono variabili libere)

$\boxed{\text{N.B.}}$ Se ci fosse $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \ker A$ vettore <u>non</u> nullo, allora

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \text{ e non tutti i } \lambda_i = 0$$

Dunque sono LINEARMENTE DIPENDENTI

DEF $\mathcal{B} = \{v_1 - v_m\}$ si dice BASE di un sottospazio $\mathcal{V}$ se vale una delle seguenti (e quindi tutte) proprietà equivalenti:

(1) $\operatorname{Span} \mathcal{B} = \mathcal{V}$ e $\mathcal{B}$ L.I.

(2) È un insieme <u>minimale</u> di generatori

(3) È un insieme <u>massimale</u> linearmente indipendente

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

ES Trovare una base del <u>sottospazio</u> $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \boxed{3x - 2y + z = 0} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ → EQ. LINEARE

- Ricordare che $\mathcal{V}$ <u>sottospazio</u> voleva dire:

(1) $v_1, v_2 \in \mathcal{V} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathcal{V}$

(2) $\lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathcal{V} \Rightarrow \lambda \cdot v \in \mathcal{V}$

In altre parole $\operatorname{span} \mathcal{V} = \mathcal{V}$

Se $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{V} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in \mathcal{V}$

→ Verifichiamo che $\mathcal{V}$ è in effetti un sottospazio:

(1) $\underset{v}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}, \underset{v'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}} \in \mathcal{V}$. Devo dimostrare che $v + v' \in \mathcal{V}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ significa che $3x - 2y + z = 0$ VERO

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ " " $3x' - 2y' + z' = 0$ VERO

SI SOMMA MEMBRO A MEMBRO

$v + v' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathcal{V}$ significa che $3(x + x') - 2(y + y') + (z + z') = 0$ VERO

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$

SÌ perché se $3x - 2y + z = 0$ allora anche $3(\lambda x) - 2(\lambda y) + (\lambda z) = 0$

$\lambda(3x - 2y + z) = 0$ →

Esempio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - y + 3z = 1 \right\}$

NON è un sottospazio perché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$

→ V è il $\mathrm{Ker}(A)$ dove $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \{ 3x - 2y + z = 0$

Ker(A) ha come base le <u>soluzioni speciali</u>

$$\begin{pmatrix} \overset{x}{3} & \overset{y}{-2} & \overset{z}{1} \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P & L & L \end{matrix}$$

Soluzione speciale n° 1: $\begin{matrix} y = 1 \\ z = 0 \end{matrix}$ $\quad 3x - 2 + 0 \Rightarrow x = 2/3$

Soluzione speciale n° 2: $\begin{matrix} y = 0 \\ z = 1 \end{matrix}$ $\quad 3x - 0 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/3$

$\mathrm{span}\{\vec{S_1}, \vec{S_2}\} = V$

è anche una BASE

$$\vec{S_1} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{S_2} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Visto che una base ha 2 vettori, il sottospazio V ha dimensione 2

- LE SOLUZIONI SPECIALI SONO SEMPRE L. I. (Quindi Ker A ha come base le sol speciali. Infatti abbiamo già visto che span{sol. spec.} = Ker(A))

ES $\vec{S_1} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{S_2} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ Per ogni λ: $\lambda \cdot \vec{S_2} = \begin{pmatrix} -1/3\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{S_2}$

$$\lambda \cdot \vec{S_1} = \begin{pmatrix} 2/3\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{S_1}$$

Supponiamo ad es. di avere x_1, x_2, x_3 variabili libere:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline * \\ * \\ * \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline * \\ * \\ * \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Guardando solo le variabili libere, le soluz. speciali hanno le stesse coordinate della base canonica

Ma le basi canoniche sono L. I.

$$\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\lambda e_2 + \mu e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

$e_1 \notin \mathrm{span}\{e_2, e_3\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

CONCLUSIONE: S_1, S_2, S_3 sono L. I. ⟶

→ Colonne pivot nella matrice ridotta sono L.I.

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & L & p & L & p \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 3\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\\-3\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\\6\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\7\\0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4\\-3\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 8\\6\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\7\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_3 = 0$$

ES

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dove $T\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ 2x+y+3z \\ x-3y+5z \end{pmatrix}$

① Dimensione e base di $\operatorname{Im} T$

② " $\operatorname{Ker} T$

③ Matrice associata a T rispetto alla base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$

⊛

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$ BASE?

B GENERATORI $\Longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha $Col(B) = \mathbb{R}^3$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$

B L.I. $\Longleftrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\operatorname{Ker} B = \{0\}$

In questo caso (matrice quadrata) queste condizioni equivalgono a dire che B è INVERTIBILE

$B = \left\{ \vec{b}_1 \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 \begin{pmatrix} 1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 \begin{pmatrix} 0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e III}]{\text{Scambio}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} p & p & p \end{matrix} \end{array}$ FINE

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$

$A_{\mathcal{E}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{matrix} \end{array}$ è la matrice associata a T rispetto alla base canonica

⊛ $T\begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\2\\1 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\1\\-3 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\3\\5 \end{pmatrix}$

$A_B = \left(T\vec{b}_1 \middle| T\vec{b}_2 \middle| T\vec{b}_3 \right)$

coordinate rispetto a B

↓

- COORDINATE RISPETTO AD UNA BASE $\mathcal{B}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad e_1 \; e_2 \; e_3$$

$\begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix} = 7 \cdot e_1 + 5e_2 - 3 \cdot e_3$. Quindi le coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$ sono $\begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad b_1 \; b_2 \; b_3$$

$$\begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{b_1} + \lambda_2 \vec{b_2} + \lambda_3 \vec{b_3} = \mu_1 \vec{b_1} + \mu_2 \vec{b_2} + \mu_3 \vec{b_3}$$

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{b_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\vec{b} + (\lambda_3 - \mu_3)\vec{b_3} = 0$$

$$\Rightarrow (\text{L.I.}) \; \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2 = \lambda_3 - \mu_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, \; \lambda_2 = \mu_3, \; \lambda_3 = \mu_3$$

$\begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ Devo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Conviene trovare le coordinate dei vettori e_1, e_2, e_3 prima di risolverlo

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 0, \; \lambda_3 = 0$ $\quad$ $\mathcal{B}$-COORDINATE $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = 1$ $\quad \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = -1, \; \lambda_3 = 0$ $\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix} = 7e_1 + 5e_2 - 3e_3 = 7\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + 5\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} - 3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-1\\8\\5\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

VERIFICA:

$$-1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{OK}$$

- MATRICE CAMBIO DI BASE

$$M = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$M\begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix}$ = coordinate di $\begin{pmatrix}7\\5\\-3\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$

$M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}*\\*\\*\end{pmatrix}$ coordinate di $\vec{v}$ rispetto a $\mathcal{B}$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \quad +2z \\ 2x+y+3z \\ x-3y+5z \end{pmatrix}$$

Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$

$$\left(T(\vec{b_1}) \middle| T(\vec{b_2}) \middle| T(\vec{b_3}) \right)$$

coordinate rispetto a $\mathcal{B}$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right) = M \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \longrightarrow M.A. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(M.A. \cdot \vec{b_1} \middle| MA \cdot \vec{b_2} \middle| MA \cdot \vec{b_3} \right) = M \cdot A \cdot B \qquad T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \longrightarrow M.A. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dove
$M = B^{-1}$

$B = \left(\vec{b_1} \middle| \vec{b_2} \middle| \vec{b_3} \right)$ vettori di $\mathcal{B}$ rispetto ad $\mathcal{E}$; M = vettori di $\mathcal{E}$ rispetto a $\mathcal{B}$

(3) La matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ si trova così:

$$A_{\mathcal{B}} = \left(T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \middle| T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \middle| T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right)$$

dove $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ e' il vettore dato delle coordinate di $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, e analogamente per gli altri.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\1&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\1&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\1&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

Ricordare che ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione dei vettori di una base $\mathcal{B}$, e i coefficienti si chiamano COORDINATE rispetto a $\mathcal{B}$.

Ad esempio calcoliamo le coordinate di $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Devo trovare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tali che

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Quindi devo risolvere

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \end{matrix}$$

Abbiamo così ricavato che $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, che sarà la prima colonna della matrice $A_{\mathcal{B}}$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Con calcoli analoghi si trovano anche $T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ e $T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Precisamente, $T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ si ~~tr~~ trova risolvendo:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = -4 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -4 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

Inoltre, $T\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ si trova risolvendo:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 4 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

Quindi la matrice $A_{\mathcal{B}}$ associata all'applicazione lineare T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la seguente

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>IMPORTANTE</u> : $$A_{\mathcal{B}} = S^{-1} A S$$

<u>dove</u>:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ è la matrice associata a T rispetto alla base canonica

- $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice avente come colonne i vettori della base $\mathcal{B}$.

- S^{-1} è l'inversa della matrice S.

- S è la matrice "CAMBIO di BASE" dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica $\mathcal{E}$. Dunque se $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di un vettore $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora $S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.

- S^{-1}, l'inversa di S, è la matrice "CAMBIO di BASE" dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}$.
Dunque se $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di un vettore $\vec{v}$ rispetto alla base canonica, allora $S^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $\vec{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

- Per calcolare S^{-1} si può procedere col metodo di Gauss-Jordan a partire da S, ma si può anche procedere in questo modo:
Si trovano le coordinate dei vettori della base canonica rispetto alla base $\mathcal{B}$, e si mettono come colonne di S^{-1}.

Nel nostro esempio, le coordinate di $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}$ si trovano risolvendo $\vec{e}_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}$$

$$\vec{e}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\vec{e}_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ad esempio le coordinate di $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ rispetto alla base B si trovano così:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ecc.}$$

Verifichiamo che in effetti S^{-1} è l'inversa di S.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo anche che

$$S^{-1} A S = A_{\mathcal{B}}, \text{ cioè che } AS = SA_{\mathcal{B}}$$

$$AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$SA_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$