MAURO DI NASSO
(Geometria)
RICEVIMENTO MARTEDÌ 14:30-16:30
· ALESSANDRO BERNARDUCCI

WWW. DM. UNIPI. IT / DINASSO/

LIBRO STRANG
Introduction to
Linear Algebra 4th edition

$\in \rightarrow$ appartenenza

10/10/2016

ALGEBRA LINEARE (EQUAZIONI DI 1° GRADO)
numeri complessi $i^2 = 1$

NOTAZIONI INSIEMISTICHE

$\Leftrightarrow$

1) PER ELENCAZIONE $A = \{1; 3; 5; 7\}$
INSIEMI FINITI
$B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ modo "sbagliato"

2 insiemi sono uguali (se e solo se hanno gli stessi elementi

2) Per estensione: si deve esplicitare una proprietà

$B = \{x \mid x \text{ è un numero pari}\} \longrightarrow \{x \mid P(x)\}$ estensione della proprietà di $P(x)$

Paradosso del barbiere O DI RUSSELL $R = \{x \mid \underbrace{x \notin x}_{\text{cose che non appartengono a se stesso}}\}$

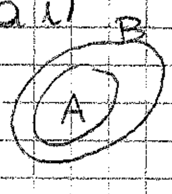
Insiemi importanti

- $\mathbb{N} \rightarrow$ numeri naturali $\{1, 2, 3, 4 \dots\}$
- $\mathbb{Z} \rightarrow$ n. interi negativi-positivi
- $\mathbb{Q} \rightarrow$ n. razionali-frazionali
- $\mathbb{R} \rightarrow$ n. reale $\sqrt{2}, \pi$
- $\mathbb{C} \rightarrow$ n. complessi (n reali e unità immaginaria i)

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

inclusione
Ogni elemento di A è presente in B $\Big\}$ $A \subseteq B$

$A \subseteq B$



$A \subset B$ significa $A \subseteq B$ e $A \neq B$

$\forall x\, (\underset{\text{(IPOTESI)}}{x \in A} \longrightarrow \underset{\text{(tesi)}}{x \in B})$
deve essere sempre vera

$\forall$ "per ogni" $\exists$ "esiste" $\Big\}$ quantificatori

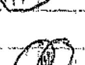
$\Longrightarrow$ implicazione

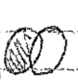
$\boxed{(\emptyset \subseteq \mathbb{N}) \text{ è vera}}$

$\emptyset$ insieme vuoto

Operazioni

$A \cup B \longrightarrow$ unione  $\{x \mid x \in A \overset{\text{"o"}}{\vee} x \in B\}$ ~~[illegible]~~ ogni elemento deve stare in almeno un insieme

$A \cap B \longrightarrow$ intersezione  $\{x \mid x \in A \overset{\text{"e"}}{\wedge} x \in B\}$ deve appartenere a tutti e 2

$A \setminus B \longrightarrow$ Differenza  $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ appartiene ~~[illegible]~~ ad A ma non a B

$3 \in \mathbb{Z} - (\mathbb{N})$ Falsa ; $-3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ vera.

$A = \{1, 3, 5\}$ $B = \{2, 4, 6\}$

$0 \in A \cap B$ = Falsa , $\emptyset \in A \cap B$ falsa
$\emptyset = A \cap B$ VERO

$C = \{0, 1, 2\}$
$D = \{0, 3, 4\}$
$C \cap D = \{0\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -1 \text{ e } x < 3\}$

è $\boxed{\text{un insieme } \{0\}}$
mentre zero non è un'insieme
(0)

$A \times B$ prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ piano cartesiano

Il prodotto cartesiano è l'insieme
i cui elementi sono le COPPIE ORDINATA $(a; b)$
la cui prima componente $a \in A$ e la
seconda componente $b \in B$

$A \times B = \{(1;2), (1;4) (1;6) (3;2) (3;4) (3;6) (5;2) (5;4) (5;6)\}$ sono 9 CARDINALITÀ

$A \times B = B \times A$ sono uguali? NO FALSO $(1;2) \in A \times B$
$(2;1) \in B \times A$

Se $A \neq B$ allora posso concludere che $A \times B \neq B \times A$?

se A è $\mathbb{N}$ e B è $\emptyset$ $A \times B = B \times A = \emptyset$ perciò hanno lo stesso prodotto cartesiano

*

se $A \neq B$ sono non $\emptyset$ posso concludere che $A \times B \neq B \times A$.
~~perchè [illegible]~~

$\boxed{A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A}$ Se $A \neq B$ allora almeno una delle 2 tra "$A \subseteq B$" e "$B \subseteq A$" deve essere falsa

$A \subseteq B$ $\forall x$ $(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A \not\subseteq B$ $\underset{\text{non}}{\neg}$ $\forall x$ $(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\neg \forall \equiv \exists \neg$
non per ogni $\equiv$ almeno uno non

$\exists x \quad \neg(x \in A \rightarrow x \in B)$ stessa cosa scritta prima

$\exists x \quad x \in A \wedge x \notin B$

✱ PROSEGUIMENTO

supponiamo che $A \not\subseteq B$ (se $B \not\subseteq A$ la dimostrazione è analoga)

Prendo $a \in A$ t.c. $a \notin B$. Prendo $b \in B$ qualunque. Allora:

$(a;b) \in A \times B$ ma $(a;b) \notin B \times A$ e quindi $A \times B \neq B \times A$

$A = \{1,2,3\} \quad B = \{2,3,4\}$

$(1;3) \in A \times B$ ma $(1;3) \notin B \times A$

insieme coppie

$\{1,2\} = \{2,1\}$ vera

coppia ordinata

$(1,2) = (2,1)$ Falso

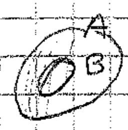
$\boxed{A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B}$

$\xLeftarrow{SI}$ è immediato.

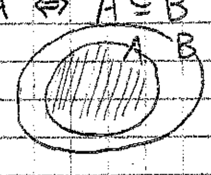
$\Rightarrow A \cup B = A \cap B$ avviene solo se $A = B$

se e solo se

- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$



- $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$



$A = \{m \in \mathbb{N} \mid 0 < m^2 - 3 < 20\} = \{2,3,4\}$

$\mathbb{N}_0 \Rightarrow$ aggiungo lo 0

$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} \mid 3m - 1 = n\} = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$ $\quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$A \cap B = \emptyset$ faccio la verifica, $2,3,4 \notin B$

$m = 2 \quad 3m - 1 = 2 \quad m = 1$

$m = 3$ No

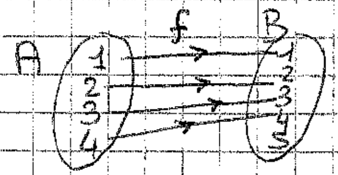
$m = 4$ No

È falso perché l'intersezione non è vuoto insieme ma è $A \cap B = \{2\}$

FUNZIONI

$f: A \to B$ è una funzione con dominio l'insieme A e codominio l'insieme B

FUNZIONALITÀ $\Rightarrow$ ad ogni elemento del dominio (a) corrisponde un unico elemento del codominio ($f(a)$)



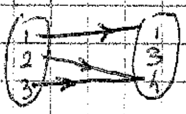
DOMINIO CODOMINIO

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\neq$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(x) = x^2$ è una funzione

$g(m) = m^2$ è una funzione che si calcola come f, ma è DIVERSA da f.

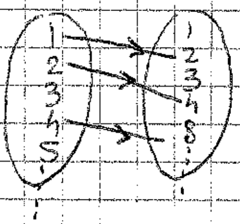
1) f. INIETTIVA ("non spreca frecce") non si colpisce 2 volte uno stesso elemento vengono colpiti distinti elementi di B
2) f. SURIETTIVA ("tutti colpiti") ogni elemento di B deve essere raggiunto da almeno una freccia.
3) f. BIUNIVOCA iniettiva e suriettiva



NO INIETTIVA
NO SURIETTIVA

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(m) = 2m$



è iniettiva

$\boxed{\neg P \Rightarrow \neg Q \overset{\text{equivale a}}{\vee} P \Rightarrow Q}$

$m \neq m \Longrightarrow f(m) \neq f(m)$

implicazione contronominale

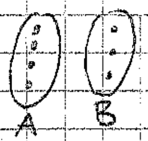
$\boxed{\neg \exists \equiv \forall \neg}$

$f(m) = f(m) \Longrightarrow m = m$

$2m = 2m \Longrightarrow m = m$

f NON surjettiva significa che esiste almeno un el. non "colpito"

Tra insiemi finiti esiste una $f: A \to B$ iniettiva se e solo se il numero degli elementi A è $\leq$ al numero degli elementi B



NON ESISTONO f INIETTIVE $f: A \to B$

$|A| \leq |B|$ $\quad$ | cardinalità

11/10/2016

Esiste $g: A \to B$ suriettiva $\Leftrightarrow$ $|A| \geq |B|$

Esiste $h: A \to B$ biunivoca $\Longleftrightarrow$ $|A| = |B|$ stesso n° di elementi

DEFINIZIONE GENERALE $f: A \to B$ è suriettiva quando

$\forall b \in B \ \exists a \in A$ tale che $f(a) = b$ $\longleftarrow$

esercizio $f: A \to B$ NON è suriettiva $\neg(\forall b \in B \ \exists a \in A \text{ t.c. } f(a) = b)$

$\exists b \in B \ \forall a \in A$ t.c. $f(a) \neq b$ $\longleftarrow$

RICORDA $\neg\exists \equiv \forall\neg$
$\neg\forall \equiv \exists\neg$

DEFINIZIONE $f: A \to B$ non è iniettiva quando

$\exists a, a' \in A \quad a \neq a'$ e ($\wedge$) $f(a) = f(a')$

$f: A \to B$ è iniettiva:

$\neg(\exists a, a' \in A \quad a \neq a'$ e $f(a) = f(a'))$

$\forall a, a' \in A \ \neg (a \neq a' \wedge f(a) = f(a'))$ $\quad$ almeno una è falsa $\quad$ $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

$\forall a, a' \in A \quad a = a'$ $\underset{o}{\vee}$ $f(a) \neq f(a')$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a, a' \in A \quad a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a') \\ \forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a' \end{array}}$$ $\longleftarrow$ contro-nominale

esercizio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2 - 1$ $\quad$ f iniettiva? f suriettiva?

Per verificare l'iniettività, devo vedere se è vero o no se vale questa proprietà

$\forall x_1 x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$

SVOLGIMENTO: $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Leftrightarrow$

$x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \qquad x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2$

almeno una di queste due possibilità

NON È INIETTIVA. Ad esempio, $f(-3) = f(3)$

f suriettiva? $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} \ f(x) = y$

(è una parabola perciò non è iniettiva)

$x^2 - 1 = y$ non ha soluzione x per ogni y. Ad esempio, se $y = -2$, $x^2 = -1$ no soluzione

$x^2 = y + 1 \qquad y + 1 \geq 0$ per avere soluzioni

(*) $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+2y=2 \end{cases}$

SISTEMI LINEARI

Funzione associata al sistema:

$T \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathbb{R}^2 =$ p. cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

dove $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+2y \end{pmatrix}$

$(x;y)$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

anzichè così, si scrivono le coordinate in colonna.

Risolvere (*) significa trovare $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ t.c. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \xmapsto{T} \begin{pmatrix} 2-9 \\ 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

T = è l'applicazione lineare associata al sistema lineare $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+2y=2 \end{cases}$

osserviamo che il sistema ha soluzione se e solo se esiste $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tale che $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \in$ Immagine(T)

$f(a) = b \quad f: A \to B$

Imm. di f = insieme dei "bersagli colpiti"

$\Downarrow$

$\text{Imm.} f = \{f(a) \mid a \in A\}$

più correttamente dovremmo scrivere

$\text{Imm} f = \{b \in B \mid \exists a \in A \;\; f(a) = b\}$

NOTAZIONE FUNZIONALE

$\text{Im} f = \{f(a) \mid a \in A\}$

es. $A = \{m^2 \mid 2 < m < 5\} = \{9; 16\}$

$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ stessa applicazione lineare T di sopra, con termini noti cambiati.

ha soluzioni $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \in$ Imm. T

$\begin{cases} 2x-3y=a \\ x+2y=b \end{cases}$

$\boxed{\text{REGOLA DI CRAMER con matrici}}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$

termini noti al posto dei coeff. di y

termini noti al posto dei coefficienti di x

$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = AD - BC$ {DETERMINANTE}

esempio $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{10-9}{4+7} = \dfrac{1}{7}$

per la verifica si devono mettere/sostituire i risultati trovati nella x e y $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-6-5}{4+3} = -\dfrac{11}{7}$

$\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$ $\quad \cdot -2 \begin{cases} 2x-4y=1 \\ -2x+4y=-4 \end{cases}$ $\quad$ $0 \quad 0 \quad -3$ $\quad -3=0$ non ha soluzioni

sistema impossibile

se provo a risolverlo CON CRAMER $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} =$ non ha risultato

il determinante fa zero

$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+2y=-3 \end{cases}$ ha soluzione (si usa CRAMER) in realtà

$\begin{cases} 2x-3y=a \\ x+2y=b \end{cases}$ ha soluzioni per ogni possibile a,b perché $\det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7 \neq 0$

e quindi si può sempre applicare CRAMER

$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ x+2y \end{pmatrix}$

per ogni $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ trovo soluzioni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ t.c. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ IMPORTANTE

significa: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è SURIETTIVA

La funzione non è iniettiva quando esistono $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

con $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, cioè quando esistono soluzioni diverse $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ allo stesso sistema $\begin{cases} 2x-3y=a \\ x+2y=b \end{cases}$

In realtà nel nostro esempio T è iniettiva.