$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Applichiamo il meccanismo di Gauss Jordan per trovare l'inversa.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{a \neq 0} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{c}{a}b & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

sottraggo $-\frac{c}{a}$ volte la I riga dalla II riga

$$d - \frac{c}{a}b \to \frac{ad-cb}{a}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{a} & b \\ 0 & \boxed{d - \frac{cb}{a}} \end{bmatrix}$$

(pivot) pivots $\forall$ elementi sulla diagonale $\neq 0$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} \; (1^*) & -\frac{ab}{ad-bc} \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

sottraggo $\gamma$ volte la II riga dalla I riga

$(1^*)$ $$1 - \frac{ab}{ad-bc}\left(-\frac{c}{a}\right) = 1 + \frac{bc}{ad-bc} = \frac{ad-bc+bc}{ad-bc} = \frac{ad}{ad-bc}$$

Voglio che $b - \gamma \cdot \frac{ad-bc}{a} = 0$ ; dunque $\gamma = \frac{ab}{ad-bc}$ $(ad-bc \neq 0)$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{I} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{cc} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}}_{A^{-1}}$$

moltiplico la I riga per $\frac{1}{a}$

moltiplico la II riga per $\frac{a}{ad-bc}$

$$E \cdot [A \,|\, I] = [I \,|\, ?]$$

↓

matrice delle mosse di Gauss effettuate

$$[E \cdot A \,|\, E \cdot I] = [I \,|\, ?] \Rightarrow \begin{array}{l} E \cdot A = I \\ E\, I = ? \end{array}$$

cioè $E = ?$

quindi $? \cdot A = I$ $\Rightarrow A^{-1} = ?$ (inversa sinistra)

↓

è anche inversa destra

$$\det A = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Cosa succede se $\det(A) = 0$ ?

Es.

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \det A = 1\cdot6 - 2\cdot3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$$ non posso trasformarla nella matrice I

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$
$$I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Se A è invertibile, qualunque sia il vettore colonna dei termini noti usando la matrice inversa trovo la soluzione $\vec{x}$.

Es.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x + 4y = -5 \end{cases} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3\cdot4 - 5\cdot2 = 12 - 10 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

verifica $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$

Soluzione $\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -25 \end{bmatrix} = \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Dunque $\begin{cases} x = 19 \\ y = -25 \end{cases}$ è soluzione del sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 5x + 4y = -5 \end{cases}$

matrici delle mosse di Gauss:

$E_1 \rightarrow$ sottrarre $\lambda$ volte la I riga dalla II

$E_2 \rightarrow$ sottrarre $\mu$ volte la I riga dalla III

$$E_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_1 \cdot I = E_1$$

$$E_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2 \cdot I = E_2$$

$$E_2 \cdot E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ -\mu & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 \, E_2$$

$E_1 \cdot E_2$ = in questo caso il prodotto è commutativo

ricorda: in generale no! il prodotto non è commutativo.

Mosse inverse:

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_3$ = moltiplico 1ª riga per $\lambda$

$$E_3 \, [I] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

anche qui questo vale $\forall A$ se moltiplico $E_3 \cdot A$ ottengo una matrice che ha la I riga moltiplicata $\lambda$ volte

$$E_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\lambda \neq 0$, la mossa inversa è:

$$E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

le trasformazioni di Gauss corrispondono a matrici invertibili

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad \text{quando } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Esercizio:

- Verificare che la formula ~~[illegible]~~ funziona anche quando $a=0$

$$A^{-1} = -\frac{1}{bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc = -bc \neq 0$$

Se A e B sono invertibili,

A·B è invertibile? Sì. Precisamente $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

A+B è invertibile? No!

contro-esempio $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ esiste $C$ t.c. $C \cdot I = I \cdot C = I$?

sì $C = I$

Dunque $I$ è invertibile ed è uguale al suo inverso.

$A = I$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

è invertibile ed ha se stessa come inversa $(-I)(-I) = I$

$$A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A + B = 0$ (matrice nulla) è ovviamente NON invertibile

$A \cdot B$ è invertibile? Sì

Con i numeri

$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

$3 \mapsto \frac{1}{3}$

$\frac{4}{5} \mapsto \frac{5}{4}$

$$\begin{array}{ccc} 3 \cdot \frac{4}{5} & \mapsto & \frac{12}{5} \\ \downarrow \quad \downarrow & & \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} & \mapsto & \frac{5}{12} \end{array}$$

ATTENZIONE: ~~que~~ Con le matrici NON vale la proprietà commutativa

Proviamo se vale $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ SÌ

$(A \cdot B)(A^{-1} \cdot B^{-1}) \overset{?}{=} I$ NO

dim. $(A \cdot B)(B^{-1} A^{-1}) =$

$A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} =$

$A \cdot I \cdot A^{-1} =$

$A \cdot A^{-1} = I$

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

$g \circ f$

$Z \xrightarrow{g^{-1}} Y \xrightarrow{f^{-1}} X$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ se $f$ e $g$ sono biunivoche (cioè invertibili)

Con le funzioni si ha una formula analoga.

- <u>TEOREMA</u> A matrice quadrata è invertibile $\Leftrightarrow$ tutti i pivots sono $\neq 0$

dimostrazione $\Leftarrow$ Col procedimento di Gauss-Jordan, si trova una matrice B (che è un prodotto di mosse di Gauss) tale che $B \cdot A = I$ (B inversa sinistra). Inoltre, visto che possiamo sempre effettuare la riduzione di Gauss-Jordan, trovo soluzioni $A \cdot \vec{x}_1 = \vec{e}_1, \dots, A \cdot \vec{x}_m = \vec{e}_m$ dove gli $\vec{e}_i$ sono i vettori canonici.

ES. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 1x + 2y = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 1x + 2y = 1 \end{cases}$

$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soluzione di $\qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ soluzione di

Considero la matrice $C = [\vec{x}_1 | \dots | \vec{x}_m]$

Allora $\underset{\text{per definizione}}{A \cdot C} = [A \cdot \vec{x}_1 | \dots | A \cdot \vec{x}_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = I$

C inversa destra

Vediamo ora che $B = C$, e quindi è la matrice inversa $A^{-1}$

$B = B\,I = B \cdot (A\,C) = (B \cdot A) \cdot C =$ proprietà associativa che vale per le funzioni e quindi per le matrici
$= I \cdot C = C$

$\Rightarrow$ Devo vedere che se A è invertibile allora tutti i suoi pivots $\neq 0$

Supponiamo per assurdo che non tutti i pivots sono $\neq 0$, cioè che dopo alcune mosse di Gauss si ottenga una matrice che ha una riga di zeri. Dunque abbiamo $E \cdot A = F$ dove E è il prodotto di mosse di Gauss, e F ha una riga di zeri.

Voglio concludere che A non è invertibile.

Infatti se A fosse invertibile:

$E \cdot A = F \Rightarrow E \cdot A \cdot A^{-1} = F \cdot A^{-1}$, cioè $E = F A^{-1}$ e questo è impossibile

perché F ha una riga di zeri, dunque anche $F A^{-1}$ ha una riga di zeri

ma $F \cdot A^{-1} = E$ che è invertibile, ma una matrice invertibile non può essere una riga di zeri.

RICORDARE: ogni mossa di Gauss è invertibile, e prodotto di matrici invertibili è invertibili.

• Permutazioni di righe

$$\begin{array}{c} P_{1,2} \\ \text{scambio} \\ \text{I e II} \\ \text{riga} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{riga I} \\ \text{riga II} \\ \text{riga III} \end{array} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{array}{l} \text{riga II} \\ \text{riga I} \\ \text{riga III} \end{array} \xrightarrow{P_{1,2}} \begin{array}{l} \text{riga I} \\ \text{riga II} \\ \text{riga III} \end{array}$$

$$P_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_{1,2} \cdot P_{1,2} = I \Rightarrow P_{1,2}^{-1} = P_{1,2}$$

$$P_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_{1,3}^{-1} = P_{1,3} \text{ perché } P_{1,3} \cdot P_{1,3} = I$$

$$P_{1,2,3} = P_{\substack{1\to 2\\ 2\to 3\\ 3\to 1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{1,2,3} \cdot P_{1,2,3} \cdot P_{1,2,3} = I$$

$$P_{1,2,3}^{-1} = P_{1,2,3}^{2}$$

$$P_{1,3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{1,3,2}^{1} = P_{1,3,2}^{2}$$

ES. trovare l'inversa destra di $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

A dimensione $2\times 3$

$A \cdot B$ ha senso per le matrici $B$ con 3 righe, $B$ $3\times p$

$C \cdot A$ ha senso per le matrici $C$ con 2 colonne, $C$ $K\times 2$

Se un'inversa destra esiste, ha dimensioni $3\times p$

Se un'inversa sinistra esiste, ha dimensioni $K\times 2$

Nel 1° caso $A \cdot B = I$ $2\times 2$ $\quad 2\times 3 \quad 3\times p \rightsquigarrow 2\times p = 2\times 2$

Nel 2° caso $C \cdot A = I$ $3\times 3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Applicando ad A un vettore di $\mathbb{R}^3$ si ottiene un vettore di $\mathbb{R}^2$.

La funzione corrispondente:

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$f_A$ non può essere iniettiva ma solo suriettiva perché $f_A$ è una applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ dove $n > m$ (dimostreremo più avanti questa proprietà)

$f_A \circ f_B = id$

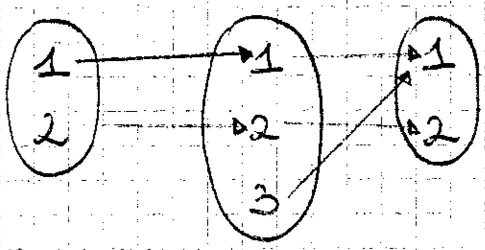
$f_{AB} = f_I = id_{\mathbb{R}^2}$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2$$

Cerco una matrice $B_{3\times 2}$ t.c. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

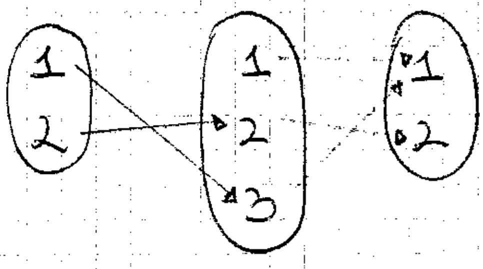
Come trovare B? L'inversa destra (se $f_A$ non è iniettiva) non è unica



Voglio che la composizione

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_A f_B = f_{AB}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

sia l'identità (voglio che $f_{AB} = f_I$)



ESEMPI

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{f_B} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \xmapsto{f_A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{f_B} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \xmapsto{f_A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1) Voglio che $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$f_B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

2) Voglio che $A \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+3c \\ 2a+4b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+3f \\ 2d+4e+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

1) $\begin{cases} a+3c=1 \\ 2a+4b+c=0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} d+3f=0 \\ 2d+4e+f=1 \end{cases}$

ad esempio prendo queste soluzioni

$a=1$ $\quad d=0$

$b=-1/2$ $\quad e=1/4$

$c=0$ $\quad f=0$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Riprova:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Es.. Trovare una inversa sinistra di

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Devo trovare $B_{2\times 3}$ tale che $B \cdot A = I_{2\times 2}$

$f_B \circ f_A = f_{BA}$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2$ $\qquad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

Considerare i vettori $\vec{e}_i$ della "base canonica".

1) $B \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $B \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A$ e $I$ assumono gli stessi valori su $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$, quindi $BA = I$

[redacted]

<u>PROPRIETA'</u>

Due matrici della stessa dimensione coincidono se e solo se assumono gli stessi valori sui vettori $\vec{e}_i$ della base canonica.

$$A \cdot \vec{e}_1 = \left[ \vec{a}_1 \middle| \vec{a}_2 \middle| \vec{a}_3 \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{def.}}{=} 1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_1$$

numero colonne di A = numero componenti $\vec{e}_i$

Se $A\,\vec{e}_1 = B\,\vec{e}_1 \Rightarrow$ la prima colonna di A = la prima colonna di B

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Vogliamo che $B$ soddisfi 1) e 2)

- $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ Voglio che $B\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

  $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c \\ d+2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b \\ 3d+e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+2c=1 \\ d+2f=0 \\ 3a+b=0 \\ 3d+e=1 \end{cases}$$

Ad esempio questa è una soluzione:

$c=0$ $a=1$

$d=0$ $f=0$

$3+b=0 \Rightarrow b=-3$

$e=1$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Riprova:

- $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-

# Spazio Vettoriale

È un insieme $V$ i cui elementi si chiamano VETTORI, con due operazioni

SOMMA $+ : V \times V \to V$ $\quad v, w \in V \Rightarrow v + w \in V$

PRODOTTO PER SCALARE $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}, v \in V \Rightarrow \lambda \cdot v \in V$

che soddisfano queste proprietà:

(1) $\forall\, v, w \in V \quad v + w = w + v$ COMMUTATIVA

(2) $\forall\, v, w, z \in V \quad v + (w + z) = (v + w) + z$ ASSOCIATIVA (la divisione non è associativa.)

(3) $\exists\, 0 \in V$ t.c. $\forall v \quad v + 0 = 0 + v = v$ ZERO

(4) $\forall\, v \in V \ \exists\, w$ t.c. $v + w = \underline{0}$ ($w = -v$ è l'opposto di $v$) OPPOSTO

Le condizioni (1), (2), (3), (4) dicono che $(V, +)$ è un GRUPPO ABELIANO

$(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo abeliano? No, non ci sono opposti, (la 4) non vale.

$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano? sì

Inoltre, devono valere anche le condizioni:

(5) $\forall v \quad 1 \cdot v = v$

(6) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda(\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) v$

(7) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(8) $\forall\, \lambda, \mu \quad (\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$

$\mathbb{Z}$ è uno spazio vettoriale? No, perché non è definita l'operazione di prodotto per scalare. Ad esempio se $v \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} v \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale? Banalmente sì.

Es. • $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ In questo caso speciale i vettori e gli scalari coincidono.

• $\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale

• Polinomi sono uno spazio vettoriale? Sì.

• $C^0(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è continua} \}$ è uno spazio vettoriale?

somma $\sin(x) + e^x$ Sì, somma di funzioni continue è continua

prodotto per scalare $\sqrt{2} \cdot \sin(x)$ sì, moltiplicare una funzione continua per un numero reale determina una funzione continua.

- $M_{2\times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ è uno spazio vettoriale? Sì (Lo spazio delle matrici $2\times 3$)

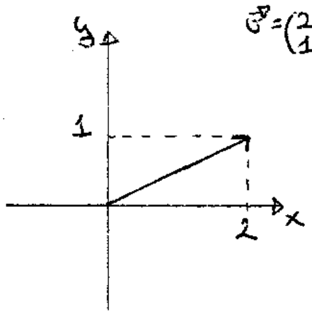
es. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ -9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ SOMMA TRA MATRICI

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 15 \\ -6 & 15 & 3 \end{bmatrix}$ SCALARE MOLTIPLICATO MATRICE

Nel corso vedremo i seguenti spazi vettoriali: $\mathbb{R}^n$, spazi di matrici, spazi di funzioni, polinomi.

- SOTTOSPAZIO VETTORIALE

es. $\mathbb{R}^2$ spazio vettoriale




Può un unico punto essere uno spazio vettoriale? Sì. $Z = \{\underline{0}\}$ qui sono definite tutte le proprietà

$V = \left\{ \lambda \cdot \binom{2}{1} \middle| \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ retta di $\mathbb{R}^2$ per l'origine

$\downarrow$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

- $V = \left\{ \lambda \cdot \binom{2}{1} \middle| \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale

Cosa devo verificare? 2 proprietà:

1) $\forall v, w \in V \quad v + w \in V$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall v \in V \quad \lambda \cdot v \in V$

es. $\binom{4}{2} \in V + \binom{-6}{-3} \in V = \binom{-2}{-1} \in V$

$2\binom{2}{1} - 3\binom{2}{1} = -1\binom{2}{1}$

- Tutte le rette passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali.

Il vettore indica la direzione della retta.

dimostrazione: 1) Prendo due vettori $v, w \in V$ qualunque.
Allora $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Allora $v + w = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$

2) Prendo $v \in V$ e $\mu \in \mathbb{R}$. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $v = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
e quindi $\mu \cdot v = \mu \left( \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\mu \cdot \lambda) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$

Esempio di sottoinsieme di $R^2$ che non è sottospazio vettoriale.
$S$ = punti che stanno sugli assi cartesiani.
$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\}$   $x = 0 \vee y = 0$

$S$ è uno spazio vettoriale? La proprietà 2) è OK.
La proprietà 1) no perché se prendiamo un vettore sull'asse $x$ e l'altro sull'asse $y$, la loro somma non è nell' ~~sottospazio vettoriale~~ insieme $S$.
(il vettore risultante non si trova sugli assi).
es. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin S$

I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono:
1) $Z = \{0\}$
2) tutte le rette per l'origine cioè $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ (retta che ha direzione $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$)

$\mathbb{R}^2$   $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$
$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in V$

Se $V$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ e se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$
allora tutti i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ appartengono a $V$, cioè $V = \mathbb{R}^2$

<u>PROPRIETÀ</u>: Se $v, w \in V$ sottospazio, allora anche $\lambda v + \mu w \in V$.

- SOTTOSPAZI VETTORIALI 6/11/2014

$V$ spazio vettoriale

- $W \subseteq V$ è un sottospazio se:

1) $\forall v, w \in W$, $v+w \in W$ (cioè $W$ è chiuso per somme)

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall w \in W$, $\lambda \cdot w \in W$ (cioè $W$ è chiuso per moltiplicazione per scalare)

es. $\mathbb{R}^2$ spazio vettoriale. Il seguente sottoinsieme è un SOTTOSPAZIO di $\mathbb{R}^2$.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

1) prendo due generici elementi di $W$, cioè $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} \in W$ oK

- 2) Se $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda x \end{pmatrix} \in W$ oK

Notiamo che $\underline{0} \in W$ dalla proprietà 2) prendendo $\lambda = 0$.

- Se $\underline{0} \notin W$ allora $W$ non è un sottospazio.

es. $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = x^2 \right\}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 49 \end{pmatrix}, \ldots$

1) Non vale. Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in W$ ma $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \notin W$

2) Non vale. Ad esempio $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in W$, ma $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \notin W$

- Sottospazio generato.

Esempio: In $\mathbb{R}^3$, prendo $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Cerco il più piccolo sottospazio $W$ t.c. $v_1, v_2 \in W$. Intanto devo avere $\forall \lambda$ $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in W$. Ad esempio $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ -15 \end{pmatrix}, \ldots, \in W$

Oss. $\{\lambda \cdot \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ è il sottospazio generato dal vettore $\vec{v}$

(retta passante per l'origine)

-

Esempio: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x = y \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ è il sottospazio generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Prendo $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq W$

Prendo $\left\{ \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, \mu \in \mathbb{R} \right\} \subseteq W$

Il sottospazio generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ è $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

$$\operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

spanning = sottospazio generato

<u>Def.</u> Dati i vettori $v_1, v_2, \dots, v_m$ di uno spazio vettoriale,

$$\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \}$$

$= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \middle| \, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$ è l'insieme delle combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_m$.

$\operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Resta da verificare $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ è un sottospazio vettoriale dimostrazione: Tesi: Cosa voglio dimostrare? Che $W$ è un sottospazio, cioè

1) $\forall v, w \in W, \; v+w \in W$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall v \in W, \; \lambda v \in W$

Cominciamo da 1)

Prendiamo due generici vettori $v, w \in W$

OBIETTIVO: Mostrare che $v+w \in W$

Vista la definizione di $W$

$v = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ per opportuni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$w = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ per opportuni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$v+w = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= (\lambda+\alpha) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + (\mu+\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$ poiché

è una combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\alpha \cdot v = \alpha \left( \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) =$

$= \alpha \cdot \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$

Ad esempio

$v = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$w = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$v+w = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

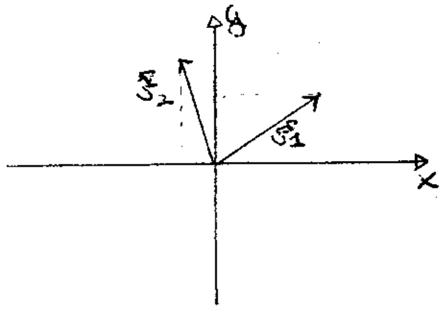
$= (3+4) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + (-7+2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Somma di 2 combinazioni lineari è una combinazione lineare
- Moltiplicando per uno scalare una combinazione lineare si ottiene una combinazione lineare

Dunque: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$ è uno sottospazio vettoriale

È il più piccolo sottospazio che contiene $v_1, \dots, v_m$ e si dice SOTTOSPAZIO GENERATO da $v_1, \dots, v_m$.

$W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$




Ricordiamo il PRODOTTO SCALARE:

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| \cos\theta$

Qual è l'angolo formato da $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$?

$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 5 \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}}\right)$

$\left\{\lambda\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}$

$\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$ è risolubile per ogni $\alpha, \beta \Leftrightarrow ad-bc \neq 0$

$\Leftrightarrow$ i vettori $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ non sono paralleli

- $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ perché $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ non sono paralleli.

Ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$. Ad esempio,

$\exists\, \lambda, \mu$ t.c. $\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ ?

Equivalentemente devo risolvere $\begin{cases} 3\lambda - \mu = 10 \\ 2\lambda + 4\mu = 7 \end{cases}$ $\rightarrow$ è risolubile

perché $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ non sono paralleli.

**Def.** Data una matrice $A$ si dice SPAZIO DELLE COLONNE il sottospazio $\text{Col}(A) = \text{Span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ dove le $\vec{a}_i$ sono le colonne di $A = [\vec{a}_1 | \dots | \vec{a}_m]$

Es. $\text{Col}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Col}\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\end{bmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

- $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -3\lambda \end{cases}$ retta per l'origine di direzione $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Il sottospazio delle colonne è un concetto importante collegato ai sistemi lineari:

$$\begin{cases} x + 2y + z + w = 2 \\ 2x + y - 3z + w = 1 \\ 3x - y + 2z + w = 2 \end{cases}$$ è risolubile?

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ [redacted]

Matrice dei coefficienti

Il sistema è risolubile se e solo se posso trovare $x, y, z, w$ t.c. $A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\exists\; x, y, z, w \text{ t.c. } x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathrm{Col}(A)$$

Vale per sistemi $m \times n$ qualunque.

- Un sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ è risolubile se e solo se $\vec{b} \in \mathrm{Col}(A)$
- $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Im} f_A$

$A_{3\times 4}$ $\quad f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{Im} f_A = \{ f_A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \} = \{ A \cdot \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \}$$

es. provate a dimostrarlo.

$Col(A)$ $\qquad$ $Col(A \cdot B)$

Es $A = [\vec{a}_1 | \vec{a}_2 | \vec{a}_3]$ $\quad 3\times 3$

$Col(A) = Span\{\vec{a}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_3\}$

$A \cdot B = A \cdot [\vec{b}_1 | \vec{b}_2 | \vec{b}_3] = [A\vec{b}_1 | A\vec{b}_2 | A\vec{b}_3] \Rightarrow Col(A \cdot B) = Span\{A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_3\}$

Domanda: $A \cdot \vec{b}_1 \in Col(A)$ ?

$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3$

$A \cdot \vec{b}$ è una combinazione lineare delle colonne di $A$, chiunque sia $\vec{b}$.

Quindi $A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_3 \in Col(A) \Rightarrow Col(AB) = Span\{A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_3\} \subseteq Col(A)$

- $\forall A \ \forall B \quad Col(A) \supseteq Col(A \cdot B)$

[redacted] 11/11/2014

[redacted]

ESERCIZIO Trovare una matrice $A$ $3\times 3$ tale che

1) $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ è risolubile

2) $A\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ è risolubile

3) $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ non è risolubile

Risposta: È impossibile. Vediamo perché.

$\vec{b} \in Col(A)$
$\Updownarrow$
il sistema
$A\vec{x} = \vec{b}$
è risolubile

$A = [\vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid \vec{a}_3]$

Cosa significa dire che $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ è risolubile?

Significa che esiste $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ t.c. $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ cioè

$x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

cioè $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \in Col(A)$. Analogamente si considerano le altre condizioni richieste.

1) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \in Col(A)$, cioè $\exists\, x_1, x_2, x_3$ t.c. $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in Col(A)$, cioè $\exists\, y_1, y_2, y_3$ t.c. $y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

Ad esempio $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & * \\ 3 & 1 & * \\ 4 & 2 & *\end{bmatrix}$  $A\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ ha come soluzione $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$A\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ ha come soluzione $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Ricordiamo che

$Col(A)$ è un sottospazio vettoriale cioè

1) $\forall v, w \in Col(A) \quad v+w \in Col(A)$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall v \in Col(A) \quad \lambda \cdot v \in Col(A)$

equivalentemente: $\forall v_1 \dots v_m \in Col(A) \ \forall \lambda_1 \dots \lambda_m \in Col(A) \ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in Col(A)$

3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \notin Col(A)$. È possibile?

Oss. $Col(A)$ è un sottospazio vettoriale, quindi tutte le combinazioni lineari di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Col(A)$ appartengono anch'esse a $Col(A)$.

Ad esempio $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in Col(A)$ e quindi 3) non può valere!

Variante: trovare $A$ matrice $3 \times 3$ t.c.

1) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è risolubile $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in Col(A)$

2) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è risolubile $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Col(A)$

3) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ non è risolubile $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin Col(A)$

Oss. Posso trovare una matrice $A$ con quelle proprietà $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ non è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin Col(A) = \left\{ \text{combinazioni lineari di } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Resta da chiarire un'ultima cosa:

è vero o no che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Voglio capire se è vero o no che esistono $\lambda, \mu$ t.c.

(*) $\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ?

Equivale a chiedere se il seguente sistema ha soluzione oppure no

$$\begin{cases} 2\lambda = 1 \to \lambda = 1/2 \\ 3\lambda + \mu = 0 \to \mu = -3/2 \\ 4\lambda + 2\mu = -2 \to 4 \cdot \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -2 \Rightarrow 2 - 3 \neq -2 \end{cases}$$

QUESTO SISTEMA NON E' RISOLUBILE

Riassumendo, prendiamo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Col(A) = \left\{ \text{combinazione lineare di} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in Col(A)$, dunque $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è risolubile

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Col(A)$, e quindi $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è risolubile

3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin Col(A)$ e quindi $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ non è risolubile

Che il sistema di sopra (*) non era risolubile, si poteva anche capire con la riduzione di Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{III riga} - 2\,\text{I riga}]{\text{II riga} - \frac{3}{2}\,\text{I riga}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III riga} - \text{II riga}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$2\lambda = 1$

$\mu = -\frac{3}{2}$

$0 + 0 \neq -1$

L'ultima riga corrisponde all'equazione $0 = -1$, e quindi il sistema non ha soluzioni.

NUCLEO (o SPAZIO NULLO)

Def. $\underset{\text{matrice}}{A}$ $\quad N(A) = Ker(A) = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = 0\}$

Es. 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x + 0 = 0 \\ 0 + y = 0 \end{cases}$

N.B. qualunque sia la matrice A, $0 \in Ker(A)$

$Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = Z$ (sottospazio che contiene solo $\underline{0}$)

2) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x = 2y \\ -6y + 6y = 0 \end{matrix}$

$Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\right\} = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ retta passante per l'origine.

Es. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$ $\quad Col(A) = \left\{\text{combinazioni lineari di } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}\right\}$

$= \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$= \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine

N.B.

$-2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$

Es. $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 5 & -10 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad Col(B) = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ retta di $\mathbb{R}^4$

$Col(A) \rightarrow$ contiene vettori di $\mathbb{R}^n$ dove $n$ = numero di righe della matrice A

IMPORTANTE! Col(A) e Ker(A) sono inclusi in spazi diversi.

Esempio

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \\ -2x + 4y = 0 \Rightarrow -4y + 4y = 0 \\ 5x - 10y = 0 \Rightarrow 10y - 10y = 0 \end{cases}$$

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = 2y \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Eliminazione di Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x - 2y = 0$$

Notare che $Col(A) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Es A sia una matrice $m \times n$

$Ker(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ e $Col(A)$ è sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Es. $W = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; A\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è un sottospazio? No! perché $0 \notin W$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

C'è un modo veloce per concludere che un certo insieme non è un sottospazio.

- Se $0 \notin W$ allora $W$ non è un sottospazio vettoriale

Es. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{II riga - I riga}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{III riga - II riga}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

colonna pivots — colonna pivots

colonne libere che corrispondono alle incognite $x_2, x_4, x_5$ → variabili libere

$Ker(A) \leq \mathbb{R}^5$

sistema avente A come matrice dei coefficienti:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Il nucleo è sottospazio di $\mathbb{R}^5$.

Assegno valori "canonici" alle variabili libere e risolvo $A\vec{x} = 0$

| | | |
|---|---|---|
| $x_2 = 1$ | $x_2 = 0$ | $x_2 = 0$ |
| $x_4 = 0$ | $x_4 = 1$ | $x_4 = 0$ |
| $x_5 = 0$ | $x_5 = 0$ | $x_5 = 1$ |

Il sistema ridotto dopo le mosse di Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

con $x_2 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ $\mapsto$ $x_1 = -2$, $x_3 = 0$.

$x_2 = 1$
$x_4 = 0$
$x_5 = 0$
→ soluzione speciale $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quando $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$ si ottiene la soluzione speciale: $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Quando $x_2 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$ si ottiene la soluzione speciale $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vedremo che

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \lambda_1 \vec{S}_1 + \lambda_2 \vec{S}_2 + \lambda_3 \vec{S}_3 \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

è il sottospazio generato delle soluzioni speciali.