COME SCRIVERE TUTTI I RISULTATI DI QUESTO SISTEMA? 13|11|14

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \quad\quad 2x_4 = b_1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad x_3 + 4x_4 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = b_3 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & b_3 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$A + \vec{b}$ = MATRICE COMPLETA

$\boxed{\text{RIPASSO}}$ senza considerare $\vec{b}$.

- $Ker(A) \to$ TUTTI I VETTORI che risolvono il sistema dove ho messo 0 ai termini noti. $Ker(A) = \{\vec{x} \in R^4 \mid A\vec{x} = 0\}$

È UN SOTTOSPAZIO INFATTI:
SE $A\vec{x} = 0$ e $A\vec{y} = 0$
allora ① $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = 0 + 0 = 0$
② $\lambda \in R \quad \vec{x} \in ker(A)$
$A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) = \lambda \cdot 0 = 0$

è SOTTOSPAZIO DI R^4

$Col(A) = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$
è sottospazio di R^3

è l'insieme ...
delle colonne ...
insieme di tutte le possibili
combinazioni lineari

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_3 - b_1 \end{array}\right|$$

$R_3 - R_1$

$R_3 - R_2$
$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - b_2 \end{array}\right|$$

variabili libere $(x_2\ x_4)$
combinazione lineare delle colonne pivot

variabili di pivot (x_1, x_3)

LE SOLUZIONI SPECIALI SONO TANTE QUANTE LE VARIABILI LIBERE

S_1 e S_2 → perché ho 2 variabili libere

- Determiniamo il nucleo trovando le soluzioni speciali di $A\vec{x} = 0$

[senza considerare la colonna dei termini noti]

Attribuisco i valori canonici alle variabili libere e si trovano le corrispondenti variabili di pivot.

① $x_2 = 1$
$x_4 = 0$

② $x_2 = 0$
$x_4 = 1$

considero il sistema ridotto

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \quad 2x_4 = 0 \\ \quad\quad\quad x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

nel caso ① (SOSTITUISCO) $\to x_3 = 0$ e $x_1 = -3$ quindi $\to \vec{S}_1 \begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{S}_1 = 0 \to \vec{S}_1 \in Ker(A)$

nel caso ② $\to x_3 = -4$ e $x_1 = -2 \longrightarrow \vec{S}_2 \begin{pmatrix}-2\\0\\-4\\1\end{pmatrix}$

$KER(A) = span\{\vec{s}_1 ; \vec{s}_2\} = \{\lambda \vec{s}_1 + \mu \vec{s}_2 \mid \lambda, \mu \in R\}$

IL NUCLEO DI UNA MATRICE È LO SPAN DELLE SOLUZIONI SPECIALI

→ Può essere che non esistano variabili libere → in questo caso $KER(A) = \{0\}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

---

quindi $KER(A) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \right\}$

$\boxed{\text{Nuovo}}$

- Considero il sistema scritto inizialmente con soluzione b_1, b_2, b_3.

1° il sistema è risolubile?

(a) $A\vec{x} = \vec{b}$ — Il prodotto ~~...~~ vtra A e $\vec{x}$ deve essere uguale a $\vec{b}$ e questo è vero $\leftrightarrow b \in Col(A)$

in questo caso il sistema è risolubile

2 modi x vederlo

(b) guardo le coordinate dei t. noti e queste devono essere uguali a un certo valore

es. nel caso considerato $b_3 - b_1 - b_2 = 0$

il sistema ha soluzione se e solo se

quindi $Col(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \mid b_3 = b_2 + b_1 \right\}$.

D'altra parte $Col(A) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} = span \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{colonne pivot}}$

la II colonna è 3 volte la I. $\cdot 3$

la IV colonna è $2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in R \right\}$

N.B IMPORTANTE

$Col(A)$ è lo span delle colonne di A che corrispondono alle variabili di pivot. (LE variabili libere sono COMB. LINEARI delle variabili pivot)

$$Col(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in R \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \mid b_3 = b_1 + b_2 \right\}$$

b_1, b_2, $b_3 = b_1 + b_2$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \mid b_1, b_2 \in R \right\}$$

PIANO DI R^3

COME FACCIO A SCRIVERE TUTTE LE SOLUZIONI POSSIBILI DEL SISTEMA?

Se $b_3 \neq b_1 + b_2$ NON CI SONO SOLUZIONI. SUPPONIAMO ALLORA ~~...~~ $b_3 = b_1 + b_2$. ~~...~~

Esempio: [illegible] RIDUZIONE [illegible], quindi [illegible], nel caso

$b_1 = 1,\ b_2 = 2,\ b_3 = b_1 + b_2 = 3$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

① voglio trovare delle soluzioni particolari.
come?
Pongo le variabili libere uguali a 0.

cioè $x_2 = x_4 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + \cancel{3x_2} + 2x_4 = 1 \\ x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

<u>una</u> soluzione particolare è $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Per controllare di non aver sbagliato i conti, ~~[illegible]~~ verifico che $A\vec{x}_p = \vec{b}$

[illegible] $\left(1\,\text{col}\,1 + 2\,\text{col}\,3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

PROPRIETÀ IMPORTANTE
$\vec{x}$ è soluzione $\longleftrightarrow$ $x = \vec{x}_p + \vec{x}_N$ per un opportuno ~~[illegible]~~ $\forall x_N \in \ker(A)$

vado a sostituire
tutti i vettori del nucleo

Quindi nel nostro esempio, l'insieme delle soluzioni è:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ricordiamo che

$x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ è risolubile $\forall \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ se e solo se, equivalentemente:

(a) $ad - bc \neq 0$ oppure

(b) $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ non hanno la stessa direzione

(c) $\forall \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\ \exists\, x, y$ t.c. $x\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

cioè $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$

es. $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}\right\} = \text{Col}(A)$ dove

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

La II colonna è libera, dunque
Col(A) è lo span dell'unica colonna pivot, cioè la I.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

v. pivot, v. libera

$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle|\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ retta

In $\mathbb{R}^3$:
Spazio generato da un vettore $\neq 0$ $\rightsquigarrow$ retta
Spazio generato da 2 vettori ~~[illegible]~~ non paralleli $\rightsquigarrow$ piano.

Ricordiamo che un piano di $\mathbb{R}^3$ per l'origine = insieme di vettori perpendicolari ad un vettore fissato $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$aX + bY + cZ = 0$

DIMOSTRAZIONE della PROPRIETA' IMPORTANTE DI PRIMA

- $\vec{x}$ e' soluzione $\Leftrightarrow$ $x = \vec{x}_p + \vec{x}_N$ dove $\vec{x}_N \in \ker(A)$

$\Leftarrow$

IPOTESI:
$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_N$ dove $\vec{x}_N \in \ker(A)$

TESI:
$\vec{x}$ e' soluzione

DIM.

Se $x_{\vec{p}}$ e' soluzione particolare e $\vec{x}_N \in \ker(A)$ allora

$$A \cdot (\vec{x_p} + \vec{x_N}) = A\vec{x}_p + A\vec{x}_N = \vec{b} + 0 = \vec{b}$$

e quindi $x_{\vec{p}} + x_n$ e' soluzione.

$\Rightarrow$ IPOTESI:
$\vec{x}$ e' una soluzione di $A\vec{x} = \vec{b}$

TESI:
$\vec{x} = \vec{x_p} + x_N$ per un opportuno $x_N \in \ker(A)$

DIM.

$A\vec{x} = \vec{b}$ per ipotesi.

$A\vec{x_p} = \vec{b}$ per def di soluzione particolare.

Sia $\vec{x_n} = \vec{x} - \vec{x_p}$. Allora $\vec{x_p} + \vec{x_n} = \vec{x}$.

Inoltre $\vec{x}_N \in \ker(A)$ perché $A\vec{x}_N = A(x - x_p) = A\vec{x} - A\vec{x}_p = \vec{b} - \vec{b} = 0$

ESEMPIO (con il sistema visto prima)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \ker(A)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e' soluzione}$$

$$A\vec{x} = A(\vec{x}_p + \vec{x}_N) = A\vec{x}_p + A\vec{x}_N$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$A \cdot \overset{\text{sol. part.}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\in \ker(A)}}_{A \cdot \text{elem. del ker} = 0} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

… metodo del
complemento algebrico

- det lo posso calcolare anche trovando mat. triangolare
  ↓ det = prodotto diagonale

- Al variare dei termini noti, è risolubile? se sì scrivere soluzioni

18/11/14

Trova $Ker(A)$ e $Col(A)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = b_2 \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 2x_4 = b_3 \end{cases} \qquad A\vec{x} = \vec{b}$$

$\boxed{\text{RIDUZIONE MATRICE}}$

$$A \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{vmatrix} \quad R_3 - 3R_2$$

$$U \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{RICERCA NUCLEO}}$

- ELEMENTI PIVOT → colonne pivot I e III
  le altre → colonne libere II e IV

$Ker(A)$? NUCLEO = spazio nullo $ker(A) = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = 0\}$

Troviamo le soluzioni speciali

Prendiamo le variabili libere x_2, x_4 e assegnamo valori canonici cioè: Ⓐ $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ Ⓑ $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, e ricavo le altre variabili.

Pongo il sistema (ridotto) uguale a 0
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ⓐ $x_3 = 0$, $x_1 = -2$ Ⓑ $x_3 = -1$, $x_1 = 1$

soluzioni speciali: $\vec{S_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{S_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$ker(A) = Span\{\vec{S_1}, \vec{S_2}\} \equiv \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

PERCHÉ POSSO FARE QUESTO PROCEDIMENTO PER CALCOLARE IL KER(A)?
cioè perché posso dire che $Ker(A) = Span\{S_1, S_2\}$?

$S_1, S_2 \in Ker(A)$ perché soluzione di un sistema

$A\vec{S_1} = A\vec{S_2} = 0$ questo ha la proprietà di applicazione lineare, cioè

Ⓐ $A(\lambda\vec{S_1} + \mu\vec{S_2}) = A(\lambda\vec{S_1}) + A(\mu\vec{S_2}) = \lambda(A\vec{S_1}) + \mu(A\vec{S_2})$

- Dati 2 insiemi: $A \times B$
  elem. che appartiene (x, y) x dove $\in A$ e $y \in B$

- mat. diagonale è invertibile se $det \neq 0$, ma è diagonale anche se ha 0 sulla diag

Ⓐ L'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tali che $a + b = 2c$
è sottospazio perché $a + b - 2c = 0$
↑
RICORDA!
NON è sottospazio se c'è solo 2 anziché 2c.
(perché non ci sarebbe 0)
$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + 2(c_1 + c_2) =$
$\underbrace{(a_1 + b_1 - 2c_1)} + \underbrace{(a_2 + b_2 + c_2)} = 0$
→ 0 ←

Ⓑ $\left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;\middle|\; ab + 2bc - ac = 0 \right\}$
$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartengono ma la somma non appartiene
No sottospazio.

- Riga di 0 dà ∞ soluzioni? sì.
  è come se fosse 2 eq. e 3 incognite

(b) $A(\vec{v}+\vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}$

Date le 2 proprietà

$A\vec{s_1} = 0$
$A\vec{s_2} = 0$

$A(\lambda\vec{s_1} + \mu\vec{s_2}) = 0$ Tutte le combinazioni lineari delle soluzioni speciali s_1 e s_2 appartengono a Ker(A)

quindi

$Ker(A) = \{\vec{x} \cdot A\vec{x} = 0\} \supseteq Span\{\vec{s_1}; \vec{s_2}\}$

Dato il sistema ridotto U ponendo le equazioni uguali a 0, usiamo le variabili libere x_2, x_4 come parametri (come se fossero numeri → ottengo sistema a 2 equaz. e 2 incognite) e troviamo le variabili pivot x_1, x_3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = -2x_2 - 2x_4 \\ 2x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$ mat. triangolare superiore → ho tutti pivot → mat. invertibile e sistema risolubile

Posso quindi risolvere ed ottengo:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

Le soluzioni sono tutti e solo i vettori della forma:

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

come dire, le combinazioni lineari:

$$x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{s_1}} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{s_2}}$$

Dunque ogni elemento del nucleo Ker(A) è combinazione lineare delle soluzioni speciali.

Abbiamo così verificato che:

$Ker(A) = span\{\text{soluzioni speciali}\}$

Vedremo inoltre che

$Col(A) = span\{\text{colonne pivot}\}$ nel nostro caso $Col(A) = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$

Troviamo soluzioni

voglio trovare le soluzioni del sistema. $Ax = b$.

- pongo le variabili libere $= 0$ e trovo una soluz. PARTICOLARE

RIFACCIO OPERAZIONE DELLE RIDUZ.

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & b_2 \\ 4 & 8 & 6 & 2 & b_3 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - 4b_1 - 3b_2 + 6b_1 \end{array}\right|$$

Il sistema è risolubile se e solo se $b_3 + 2b_1 - 3b_2 = 0$.

N.B. Questo accade se e solo se $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in Col(A)$, dunque possiamo concludere che
$Col(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \middle| \; b_3 + 2b_1 - 3b_2 = 0 \right\}$

Prendiamo ad esempio $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$

quindi alla fine della riduzione $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 + 2b_1 - 3b_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 + \cancel{2x_2} + 3x_3 + \cancel{2x_4} = 1 \\ -2x_3 - \cancel{2x_4} = -1 \end{cases}$$

$x_2 = x_4 = 0$
$x_3 = 1/2$
$x_1 = -1/2$

$\vec{x_p} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ SOLUZIONE PARTICOLARE

L'insieme di tutte le soluzioni del sistema $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' il seguente:

$$S = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{soluzione particolare}} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{elemento di } ker(A)} \middle| \; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$

Ricorda:
$Ker(A) = $ span {soluzioni speciali}. Oggi vedremo che:

$Col(A) = $ span { colonne delle variabili di pivot }

Es 1 con mat. triangolare (superiore)

[NB → matrici triangolari sono già ridotte]

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Se gli elementi sulla diagonale (PIVOT) sono tutti $\neq 0$
↓
MATRICE A e' invertibile e il suo determinante e' il prodotto dei pivots.

a: la II colonna non e' combinazione lineare della I
b: la III " " " " " delle prime 2

a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ non e' comb. lineare di $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

altrimenti avrei $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Questo e' impossibile perchè sarebbe $0 \cdot \lambda = 4 \rightarrow$ ↯

b. analogo ragionamento per vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ che NON e' combinaz. lineare $\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, altrimenti $\lambda 0 + \mu 0 = -3$ che e' assurdo.

Es 2

$$\underset{4 \times 6}{A} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 7 & 1 & 13 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

① Ogni colonna di una matrice A che corrisponde a una variabile libera e' combinazione delle precedenti

② Ogni colonna di A che corrisponde a una variabile pivot NON e' combinazione delle precedenti

Riduciamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$\downarrow$ P, $\downarrow$ L

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S$$

matrice ridotta a scala

P, libere

x_1, x_3 PIVOT e x_2, x_4, x_5, x_6 libere

Per arrivare da A a S
↓
applico ad A la mat invertibile E 4×4, data dal prodotto delle mosse di Gauss che abbiamo usato.

$E_{4 \times 4} \cdot A_{4 \times 6} = S_{4 \times 6}$

RELAZIONE TRA Ker(A) E ...

Ker(A) e Ker(S) → $\boxed{Ker(A) = Ker(S)}$

def

$A \cdot \vec{x} = 0$ $S\vec{x} = 0$

stesse soluzioni

Il sistema $Ax = 0$ e il sistema $Sx = 0$ hanno le stesse soluzioni.

Se E è invertibile e $E \cdot A = S$, allora $A\vec{x} = 0$ se e solo se $S \cdot \vec{x} = 0$

Dim.

$S \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (E \cdot A) \cdot \vec{x} = 0$

Attenzione!
Se E invertibile allora $E \cdot \vec{x} = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = 0$
cioè quadrata

$\Longleftarrow$ se $\vec{x} = 0$, allora $E \cdot \vec{x} = 0$ (NB) Questo vale anche per matrice non invertibile.

$\Longrightarrow$ devo dimostrare che $Ker(E) = \{0\}$

Infatti $E \cdot \vec{x} = 0$ significa che solo il vettore $0 \in Ker(E)$

$E \cdot \vec{x} = 0 \Longrightarrow E^{-1}(E \cdot \vec{x}) = 0 \rightarrow I \cdot \vec{x} = \vec{x} = 0$

L'unico $\vec{x}$ che può stare nel nucleo è 0

Se ho un sistema nxn dove la matrice dei coefficienti è invertibile, allora valgono due proprietà:

1) L'unica soluzione $A \cdot \vec{x} = 0$ è $\vec{x} = 0$ → cioè $Ker(A) = \{0\}$

2) Per ogni $\vec{b}$ il sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ha una soluzione

$$\vec{x_p} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

(NB) Questa $\vec{x}$ è l'unica soluzione in quanto tutte le soluzioni possibili sono date da $x = x_p + x_N$ dove $x_N \in Ker(A)$
Ma $x_N = 0$ quindi $\vec{x} = \vec{x_p}$

$\boxed{Col(A) \neq Col(S)}$

A ed S hanno in genere spazi colonna diversi

Nel nostro esempio, la I colonna di A non è combinazione delle colonne di S. (ultime 2 coordinate $= 0$)

RICORDA
Col(A) importante perché dato $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$,
$A\vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione $\Leftrightarrow \vec{b} \in Col(A)$

POICHE' $Col(A) \neq Col(S)$
quali relazioni esistono tra i 2 spazi?

In una matrice a scala una colonna libera è sempre combinazione lineare delle precedenti colonne pivot.

Esempio:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&3&0&0\\2&4&3&7&0&0\\0&0&1&1&1&1\\1&2&1&2&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&3&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&1&3&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{\text{scambio}\\ \text{III e IV}\\ \text{riga}}}\begin{bmatrix}1&2&1&3&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&1&3&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&2&2\end{bmatrix}\to\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&2&1&3&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&1&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}p&L&p&p&p&L\end{matrix}\end{array}=S$$

x_1, x_3, x_4, x_5 pivot

x_2, x_6 libere

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\text{qualunque vettore}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&-1&1&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}=\text{vettore}$$

La colonna libera $\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle colonne precedenti $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, precisamente $2\cdot \mathrm{Col\,I} - 1\cdot \mathrm{Col\,II} = 0$

Quindi, se S è la matrice ridotta a scala, $S\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=0$.

Ma $Sx=0$ e $Ax=0$ hanno le stesse soluzioni, allora $A\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=0$, cioè $2\cdot \mathrm{Col}_A\mathrm{I} - 1\cdot \mathrm{Col}_A\mathrm{II}=0$, quindi la II colonna di A è combinazione della I colonna di A.

La VI colonna libera di S, cioè $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ è combinazione lineare delle colonne pivot precedenti, cioè $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ t.c.

$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. Con l'ultima coordinata che è sempre 0, la cosa è vera sempre per ogni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Guardando solo alle prime 4 coordinate, cerchiamo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tali che

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

e questo equivale a

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Chiaramente la matrice C e' invertibile perche' triangolare con gli elementi sulla diagonale $\neq 0$ (sono i pivot!).

Dunque troviamo sempre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, qualunque sia il vettore a destra

Nel nostro caso: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 1 \quad e \quad \lambda_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\\ \lambda_4 = 1\end{matrix}$

Quindi

$$0 \cdot \underset{Col_S I}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}} + 0 \cdot \underset{Col_S III}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} + 0 \underset{Col_S IV}{\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}} + 1 \underset{Col_S V}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}} = \underset{Col_S VI}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}$$

Questo ci dice che

$$S \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\\+1\\-1\\0\end{bmatrix} = 0.$$

Ma le matrice ridotta S ed A hanno le stesse soluzioni per $Sx = 0$ e $Ax = 0$.

Dunque anche $A \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\\+1\\-1\\0\end{bmatrix} = 0$. Questo significa che

$0 \cdot Col_A I + 0 \cdot Col_A III + 0 \cdot Col_A IV + 1 \cdot Col_A V = Col_A VI$, cioe'

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}1\\3\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix}3\\7\\1\\2\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ed anche in A la colonna libera VI e' combinazione lineare delle colonne pivot precedenti.

VETTORI INDIPENDENTI → $v_1, \dots, v_n$ si dicono indipendenti se
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \rightarrow \lambda_i = 0$ per ogni i.

- l'unica combinazione lineare di $v_1 \dots v_n$ uguale a 0 è quella dove tutti i coefficienti sono 0.
- NESSUN vettore è combinazione lineare degli altri.

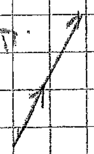
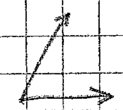
Altrimenti i vettori sono DIPENDENTI

Con 2 vettori: v_1, v_2 sono DIPENDENTI $\Leftrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ dove NON TUTTI $\lambda_i = 0$

es. $\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$

$\Updownarrow$

$v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 = 0 \qquad v_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} v_2$ è multiplo di v_2

VETTORI DIPENDENTI  VETTORI INDIPENDENTI 

Dunque 2 vettori sono indipendenti
$\Updownarrow$
non hanno la stessa direzione

Es. 1

I vettori sono dipendenti o indipendenti?

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

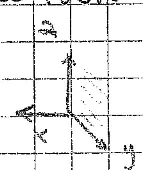
$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad A\vec{x} = 0 \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \ker(A)$

↑
MATRICE INVERTIBILE

$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unica soluzione
VETTORI SONO INDIPENDENTI

Es. 2

2 vettori v_1, v_2 sono dipendenti se e solo se sono uno multiplo dell'altro.

Es. 3 $\quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → 

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
SONO VETTORI INDIPENDENTI

13.4

NB. Se ho matrice invertibile nel Ker(A) ho solo il vettore 0.

$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$ dipendenti o indipendenti?

Sia $\lambda_1\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, cioè

$\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\5 & -1 & 4\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$, cioè $\begin{vmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{vmatrix} \in Ker(A)$

PROCEDIMENTO:
- applico Gauss
- cerco pivot e colonne libere → le colonne libere sono combinazione lineare delle colonne pivot precedenti → VETTORE DIPENDENTE

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\5 & -1 & 4\\2 & 3 & 5\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -1\\0 & -11 & -11\end{vmatrix} \to \begin{array}{c}\begin{matrix}x_1 & x_2 & x_3\end{matrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}\end{array}$$

x_1, x_2 variabili pivot
x_3 variabile libera

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\\ -x_2 - x_3 = 0 \to -x_2 = x_3\end{cases}$$

Trovo la soluzione speciale dove la variabile libera $x_3 = 1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$
$x_1 - 2x_3 + 3x_3 = 0$
$x_2 = -1$
$x_1 = -1$

$$Ker(A) = \left\{\lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \neq \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

↓
VETTORI DIPENDENTI

$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ soluzione speciale. Dunque $-1\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

e quei 3 vettori sono DIPENDENTI

OSS.

3 vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti $\iff Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

dove le colonne di A sono v_1, v_2, v_3

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

v_1, v_2, v_3 sono indipendenti $\Leftarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

PROP.

$v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ sono indipendenti $\Leftrightarrow Ker(A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}$

(A matrice avente $v_1, \dots, v_k$ come colonne)

NB. 3 vettori di $\mathbb{R}^2$ sono necessariamente DIPENDENTI

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ SONO DIPENDENTI

verifico

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\1 & 5 & 0\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} \in \ker(A)$$

$A_{n \times m}$
n eq m incognite → se $m > n$ ∞ soluzioni:
avrò sempre una colonna libera combinazione delle altre 2.
$\ker(A) \neq 0$ ~~[illegible]~~

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\2 & -1 & 7\end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\0 & -11 & 7\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 0 \\ -11x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

scelgo $x_3 = 1$
$x_1 = -35/11$
$x_2 = +7/11$

$x_1 \cdot v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$

SOSTITUISCI: $-\frac{35}{11}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{7}{11}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

BASE → $v_1 \dots v_n$ si dicono BASE dello spazio V se:
(a) $v_1 \dots v_n$ sono indipendenti
(b) span $\{v_1 \dots v_n\}$ è tutto lo spazio di V
] basta che il det sia $\neq 0$ (→ quindi invertibile)

in $\mathbb{R}^2$ (a) posso prendere al massimo 2 vettori indipendenti (per ⊛)

con un solo vettore → retta di $\mathbb{R}^2$

(b) servono almeno 2 vettori per generare $\mathbb{R}^2$

ES 1

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ è base di $\mathbb{R}^2$?

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ sono indipendenti?

$$\begin{vmatrix}1 & -3\\2 & 1\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{vmatrix} \in \ker(A)$$

mat. 2x2, det $\neq 0$ → invertibile
↓
$\ker(A) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

(b) span $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$?

dato che A è invertibile allora ogni vettore $\vec{b}$ è soluzione
↓
tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ stanno nello span $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\right\}$

CONCLUSIONE: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ sono BASE di $\mathbb{R}^2$ · formano $\mathbb{R}^2$ una base di $\mathbb{R}^2$ se e solo se il $\det(A) \neq 0$ quindi A è invertibile

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^3$

- Base canonica $e_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} e_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} e_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$?

(a) $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

sono indipendenti.

(b) generano $\mathbb{R}^3$? sì $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a v_1 + b v_2 + c v_3$

- può $\exists$ una base di $\mathbb{R}^3$ con 4 vettori?

No, perché ho $A_{n \times m}$ con $m > n$ $\rightarrow$ max 3 pivot e una colonna libera $\rightarrow$ $\ker A \neq \{0\}$ e i vettori sono DIPENDENTI

(A è la matrice avente quei 4 vettori come colonne)

- Può esistere una base di $\mathbb{R}^3$ con meno di 3 vettori?

No perché lo span di 2 vettori di $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ un piano di $\mathbb{R}^3$ non tutto $\mathbb{R}^3$.

In generale:

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ non può essere base perché altrimenti vorrebbe dire che

$$\forall \vec{b} \ \exists \ \lambda_1, \lambda_2 \text{ tc } \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

cioè $A\vec{x} = \vec{b}$ avrebbe soluzione $\vec{x}$ per ogni $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

In particolare se prendo $\vec{b}$ uguali alla base canonica, cioè trovare

Se A è $n \times m$ con $n < m$, allora A NON ha inversa sinistra

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tc $A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \vec{e}_1$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tc $A \begin{vmatrix} x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \vec{e}_2$

$\begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$ tc $A \begin{vmatrix} x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} = \vec{e}_3$

quindi $A \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{vmatrix}}_{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ma è IMPOSSIBILE!

$A \cdot B = I$

$AB \cdot \vec{x} = I \cdot \vec{x}$

$I\vec{x} \rightarrow \vec{x} \neq 0$

$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_6 \end{vmatrix}$ ho più righe che colonne

Ho al max 2 pivot, dunque ho necessariamente almeno una colonna libera, quindi $\ker(B) \neq \{0\}$ ed esiste $\vec{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tc. $B \cdot \vec{x} = 0$. IMPOSSIBILE

NUMERI COMPLESSI

$\sqrt{-1}$, $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, SPAZIO VETTORIALE R^2, MOTO ARMONICO

I numeri complessi sono un punto d'incontro di tutte queste nozioni.

EQ. RISOLVIBILE

$$x^2 = 4 \quad x = \begin{cases} -2 \\ +2 \end{cases}$$

EQ. NON RISOLVIBILE

$$x^2 = -1$$

non posso risolvere, ma introduco $i = \sqrt{-1}$ che è un nuovo numero per rappresentare

UNITÀ IMMAGINARIA $\rightarrow$ $i^2 = -1$

come $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

i lo posso introdurre nelle operazioni di • somma:

i lo uso come x nei polinomi

$$(a+ib) + (c+di) = a+c+i(b+d)$$

• prodotto:

es. $(7+4i)(3-2i) =$ -1

$$21 - 14i + 12i - 8i^2$$

$$= 29 - 2i$$

Di solito un generico numero si indica con z

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a,b \in R\}$$

a - parte reale
b - " immaginaria

ESEMPIO

Risolvi

$$x^2 - 6x + 25 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

VERIFICA $(8i)^2 = 64i^2 = -64$

$$\sqrt{-64} = \sqrt{64(-1)} = \sqrt{64i^2} = 8i$$

$$x = \begin{cases} 3-4i \\ 3+4i \end{cases}$$

VERIFICO che le soluzioni trovate siano corrette

$$x^2 - 6x + 25$$

$$(3+4i)^2 - 6(3+4i) + 25$$

$$\cancel{24i} + 9 + 16i^2 - 18 - \cancel{24i} + 25 = 0$$

$$16i^2 \rightarrow -16$$

• divisione

$\frac{3+4i}{4-3i}$ per risolvere considero

$z = a+bi$
$\bar{z} = a-bi$ coniugato di z

$$\frac{3+4i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i} \to \text{(coniugato di } 4-3i)$$

$$= \frac{(3+4i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{\cancel{12}+9i+16i+\overbrace{12i^2}^{-12}}{16-\underbrace{9i^2}_{9}} = \frac{\cancel{25}i}{\cancel{25}} = i$$

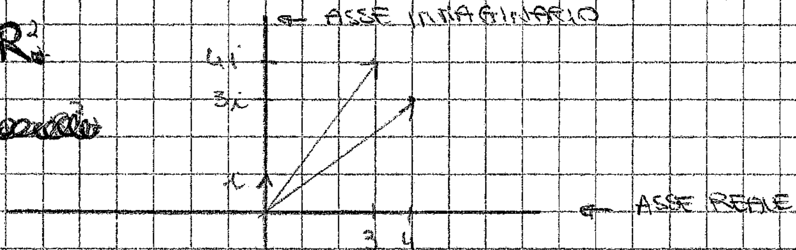
verifica $i(4-3i) = 4i-3i^2 = 4i+3$

TEOREMA FONDAMENTALE dell'ALGEBRA:

Ogni equazione a coefficienti complessi di grado n ha n soluzioni complesse.

COLLEGAMENTO DEI NUMERI COMPLESSI CON $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^2$



$3+4i \to \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$4+3i \to \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

$i \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

FUNZIONA LA SOMMA → $(3+4i)+(4+3i) = 7+7i \to \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}$

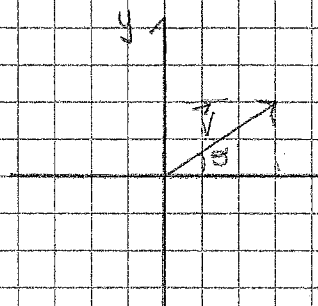
FUNZIONA LA MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE → $2(4+3i) = 2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Quindi $\mathbb{C}$ è uno SPAZIO VETTORIALE

C'È UN COLLEGAMENTO TRA NUMERI COMPLESSI e TRIGONOMETRIA

coordinate polari nel piano

Es. $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$



Conoscendo $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Posso conoscere
- modulo → lunghezza di $\vec{v}$ = ρ
- θ → argomento → angolo con asse x

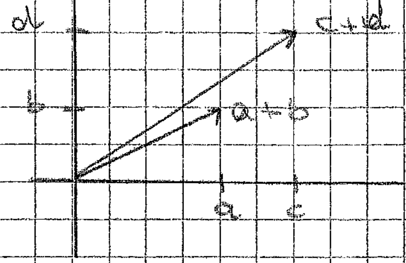
per definire la sua posizione nello spazio

$\rho = \sqrt{16+9} = 5$ (MODULO)

$\theta \Rightarrow tg\,\theta = 3/4 \to \theta = arctg(3/4)$ (ARGOMENTO)

Quindi deve valere anche per i numeri complessi:

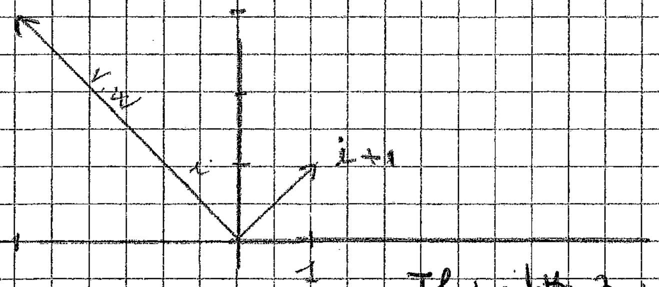
$z = a+bi \rightsquigarrow (\rho;\theta)$
$w = c+di \rightsquigarrow (\rho';\theta')$



PROPRIETA'

$z\cdot w \to (\rho'\rho \,;\, \theta+\theta')$

Il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti



quindi se

$z = 1+i \qquad \rho=\sqrt{2} \qquad \theta=\pi/4$

$w = 3i \qquad \rho=3 \qquad \theta'=\pi/2$

Il prodotto $z\cdot w$ avrà:

modulo $3\cdot\sqrt{2}$ per prop — ARGOMENTO $3/4\,\pi$

verifico con i calcoli:

$(1+i)(3i) = -3+3i$

Applicazione della trigonometria ai numeri complessi

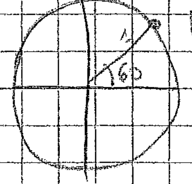
Risolviamo $z^3 = -1$

ma z per la prop. è dato da $(\rho;\theta)$ in coordinate polari.

$z^3 \to (\rho^3, 3\theta)$

$-1 \to (1;\pi)$

$$\begin{cases}\rho^3 = 1 \Rightarrow \rho = 1\\ 3\theta = \pi \to \theta = \pi/3\end{cases}$$



le coordinate sono il seno e il coseno

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Questo numero $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ è soluzione di $z^3 = -1$. Ci sono altre 2 soluzioni

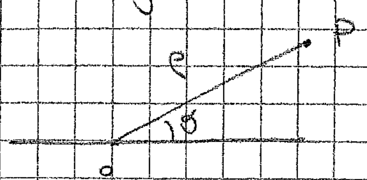
(*) $\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\pi\end{cases}$ e $\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{5}{3}\pi\end{cases}$

cioè -1 — cioè $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

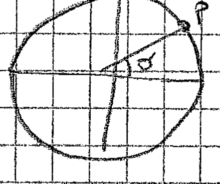
20/11/14 RIPASSO:

ρ = distanza da P a O = modulo (numero reale non negativo)

ϑ = angolo in radianti da $\overline{OP}$ con l'asse x



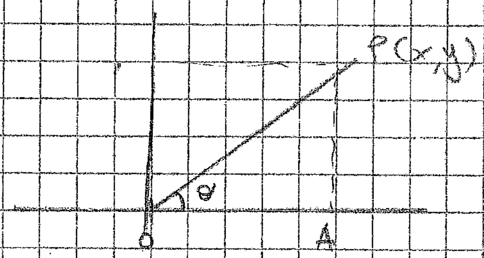
dato ρ fissato es. $\rho = 3$



l'insieme dei punti di CENTRO O e raggio ρ

$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$

P $(\rho\cos\vartheta; \rho\sin\vartheta)$



$\rho = \overline{OP} = \sqrt{x^2+y^2}$

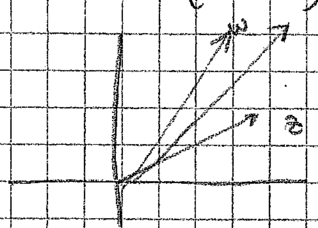
$\vartheta = \operatorname{arctg}(y/x)$ quando $x \neq 0$

$\frac{x}{y} = \frac{\cancel{\rho}\cos\vartheta}{\cancel{\rho}\sin\vartheta} = tg\,\vartheta$

NUOVO:

$z \in \mathbb{C}$
$w \in \mathbb{C}$

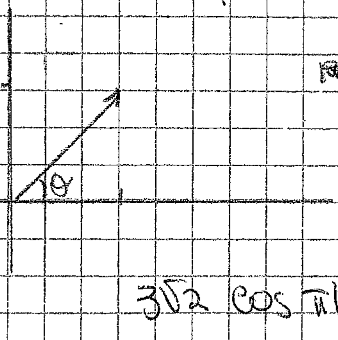
$z + w = (a+c) + i(b+d)$



Prodotto tra numeri complessi.

$z = \overset{x}{a} + i\overset{y}{b}$

es. $\underset{x}{3} + \underset{y}{3i}$



$\vartheta = \pi/4$
$\rho = 3\sqrt{2}$ coordinate polari di $3+3i$

$3\sqrt{2}\cos\pi/4 = 3$ x

$i(3\sqrt{2}\sin\pi/4) = 3i$ y

$3\sqrt{2}\cos\pi/4 + (3\sqrt{2}\sin\pi/4)i = 3+3i$

$3\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$

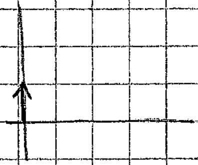
quindi ogni numero z si può scrivere anche come

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ FORMA POLARE

$z = a + ib$ FORMA CARTESIANA

Es.

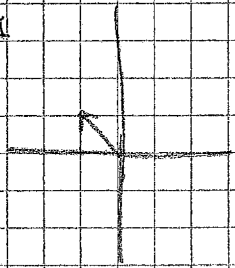
a) i $\quad a + ib$, $a = 0$, $b = 1$



$1\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$

$1(\cos\pi/2 + i\sin\pi/2) \to i$

b) $i - 1$ $\quad a = -1$, $b = 1$

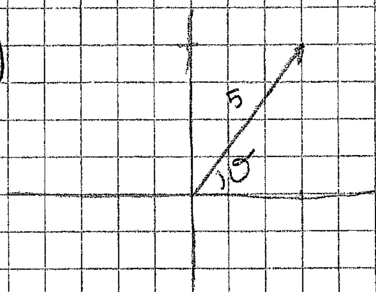


$\rho = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$z = \sqrt{2}(\cos 3/4\,\pi + i\sin 3/4\,\pi)$

c) $3 + 4i \to \begin{pmatrix} 3 \\ +4 \end{pmatrix}$



$\rho = |z|$

$|z| = \sqrt{9+16} = 5$

Se $z = a + ib$,
$\bar{z} = a - ib$.

NB. $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ dove $\bar{z}$ è il CONIUGATO di z.

$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

$\theta = \operatorname{arctg} 4/3$

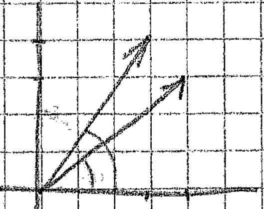
$5(\cos\theta + \sin\theta)$

$z\cdot w = (a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$w = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$

$z = 4 + 3i$
$w = 3 + 4i$



$z = 5(\cos\theta + \sin\theta)$

$\theta = \operatorname{arctg} 3/4$

$25\left(\cos(180) + i\sin(180)\right)$

$w = 5(\cos\varphi + \sin\varphi)$

$\varphi = \operatorname{arctg} 4/3$

$z \cdot w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,\tau(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\rho \cdot \tau\,(\cos\theta\cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi + i\sin\theta\cos\varphi + i^2\sin\theta\sin\varphi)$

i^{-1}

$\rho \cdot \tau\left(\underbrace{(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)}_{\cos(\theta+\varphi)} + i\underbrace{(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\theta)}_{\sin(\theta+\varphi)}\right)$

$z \cdot w =$
$\rho \cdot \tau\left((\cos\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)\right)$

Il prodotto tra 2 numeri complessi $z, w \in \mathbb{C}$ è il numero complesso il cui
- modulo è il prodotto dei moduli di z e w
- e l'argomento è la somma degli argomenti di z e w

$\sqrt{i} = a + ib \quad t.c. \quad (a+ib)^2 = i$

$x = \rho(\cos\theta + \sin\theta) \xrightarrow{x^2} (\rho^2, 2\theta) = (1; \pi/2)$

$x^2 = x \cdot x$ modulo ρ per entrambi $\to \rho^2$ $\quad$ i trovato prima

$x^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$

Dunque $x^2 \rightsquigarrow (1, \pi/2)$ implica che

$x \Rightarrow (1; \pi/4)$ $\qquad$ $\rho^2 = 1 \to \rho = 1$

$x = 1\ (\cos 5\pi/4 + i\sin\pi/4)$ $\qquad$ $2\theta = \pi/2 \to \theta = \pi/4$
$\theta = 5/4\,\pi$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Riprova: $\left(\sqrt{2}/2 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$

Se $x \to (\rho; \theta)$

allora $x^2 \to (\rho^2, 2\theta)$

$i = (1; \pi/2)$

Dunque $\rho^2 = 1 \to \rho = 1$

$2\theta = \pi/2 + 2k\pi \to \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \longrightarrow \theta = \pi/4$ e $\theta = \frac{5}{4}\pi$

2 angoli → 2 soluzioni

$x_1 = (1; \pi/4)$

$x_1 = 1\left(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4\right) = \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$

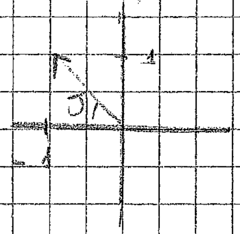
$x_2 = (1; 5/4\,\pi)$

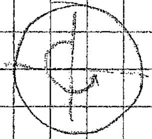
$x_2 = 1\left(\cos 5/4\pi + i\sin 5/4\pi\right) = -\frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2}$.

Esercizio:

$(-1+i)^{2009}$

- $-1+i \to (\sqrt2; 3/4\,\pi)$





se $(i-1)^2 \to \left(2; \frac{3}{2}\pi\right) \to -2i$

$(i-1)^3 \to \left(2\sqrt2; \underset{\Downarrow\ \pi/4}{\frac{9}{4}}\pi\right) = \left(2\sqrt2, \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$

$2\sqrt2\left(\sqrt2/2 + i\cdot\sqrt2/2\right) = 2 + 2i$

$(-1+i)^{2009} \to \left((\sqrt2)^{2009}; 2009\cdot\frac{3}{4}\pi\right)$

ρ: $\sqrt2^{2008}\cdot\sqrt2 \to 2^{1004}\cdot\sqrt2$

$\vartheta = \frac{6027}{4}\pi \to \cancel{\frac{6024}{4}}\pi + \frac{3}{4}\pi$

$1506\pi + \frac{3}{4}\pi$

$(-1+i)^{2009} = 2^{1004}\cdot\sqrt2\left(\cos 3/4 + i\sin 3/4\right) =$

$-\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$

$= 2^{1004}(-1+i)$

- $x^3 = 1$ 3 soluzioni

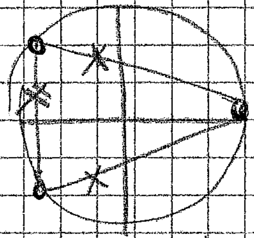
$x \to (\rho; \vartheta)$

$x^3 \to (\rho^3; 3\vartheta) = (1; 0)$

$\rho^3 = 1 \to \rho = 1$

$3\vartheta = 2k\pi$

$\vartheta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \; : \begin{cases} 0 \\ 2/3\,\pi \\ \frac{4}{3}\pi \end{cases}$



tr. equilatero

$x_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2$

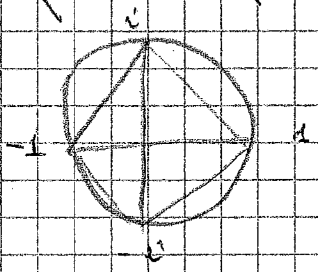
VERIFICA

- $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3$

$-\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8} i^3 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{4} i^2$

$-\frac{1}{8} - \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{8} i} + \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{8} i} + \frac{9}{8} = 1$

- $x^4 = 1$



24/11/2014

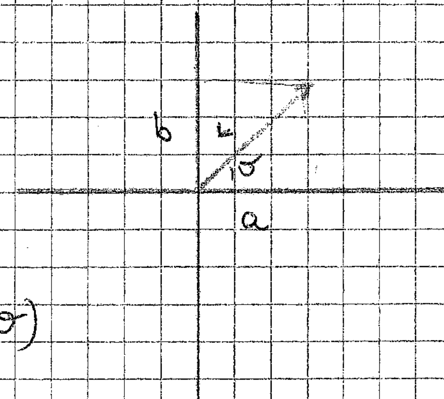
$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc) \qquad i^2 = -1$

$z \cdot w$

$(\rho; \theta) \cdot (r; \varphi) = (\rho \cdot r ; \theta + \varphi)$

ρ modulo $= |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\theta = \operatorname{arctg} b/a$

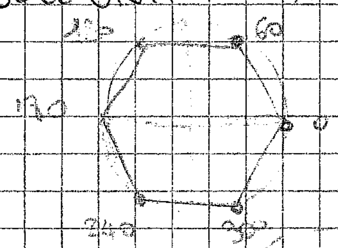


$z \to (\rho; \theta) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$-1 = (1, \pi)$

RADICI ENNESIME DELL'UNITA' $x^n = 1$

$x^6 = 1$



$z = (\rho; \theta)$

$z^6 = (\rho^6; 6\theta)$

$1 = (1; 0)$

$\rho^6 = 1 \longrightarrow \rho = 1$

$6\theta = 0 \to 6\theta = 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\theta = \frac{\pi}{3} \cdot k$

cioè $\theta = 0$, $\theta = \pi/3$ $\theta = \frac{2}{3}\pi$ $\theta = \pi$

$\theta = \frac{4}{3}\pi$ $\theta = \frac{5}{3}\pi$

soluzioni

$(1, 0) \quad (1, \pi/3) \quad (1, \frac{2}{3}\pi) \quad (1, \pi) \quad (1, \frac{4}{3}\pi) \quad (1, \frac{5}{3}\pi)$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\pi/3 \qquad z_3 = 1\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$

$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z_4 = -1 \qquad z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ESPONENZIALE COMPLESSA.

$e^z = e^{a+ib}$

$= e^a \cdot e^{ib}$

Assumo che questo esponenziale esista → ho le solite proprietà

es. $e^{3+4i} = \underbrace{e^3}_{\text{lo conosco}} \cdot e^{4i}$? → Devo dare un significato a e^{4i} e in generale a e^{ix} con $x \in \mathbb{R}$

sviluppo di Taylor di $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \ldots$

$$e^{xi} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

$$i^2 x^2 = -1x^2$$

$$e^{xi} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$e^{xi} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{+\, i \operatorname{sen} x}$$

$$e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

concludendo $e^z = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$

e^z

$\rho = \sqrt{\ } = e^{\operatorname{Re} z}$

$\theta = \operatorname{Imm} z$ (parte immaginaria di z)

sta sul cerchio unitario

- $e^i = e^{0+i1} = e^0 (\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 + i \sin 1$
- $e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0 (\cos\pi + i \sin\pi) = -1$

Dunque $e^{i\pi} + 1 = 0$

(#) moto armonico

$F = -k\vec{x}$

$m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

Per semplicità supponiamo $\frac{k}{m} = 1$,

$\ddot{x} + x = 0$

$x(t) = \cos t$

$x(t) = \sin t$

sono soluzioni

$x(t) = A\cos t + B\sin t$

Proviamo
$$\begin{cases} x = e^{it} \\ \dot{x} = i e^{it} \\ \ddot{x} = (-1) e^{it} \quad (-1 = i^2) \end{cases}$$

$\ddot{x} + x = 0\,!$

$x(t) = e^{it}$ è soluzione, inoltre $x(0) = 1$ $\dot{x}(0) = i$

se soddisfa allora supponiamo

$e^{it} = A\cos t + B\sin t$

$$\begin{cases} x(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t \\ \text{si ricava ponendo } x(0) = 1 \text{ e } \dot{x}(0) = i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = i \end{cases} \Rightarrow \cos t + i \sin t$$

RISOLVI

(1) $z^3 - 2|z|^2 = 0$ (2) $z^3 = \bar{z}^4$

(3) $9e^z - e^{3\bar{z}} = 0$

(1) $z^3 - 2|z|^2 = 0$ dove $z \neq 0$ ($z=0$ è soluzione)

$z^3 = 2|z|^2$

coordinate polari $\rightarrow$ $z\ (\rho; \theta)$, $z^3\ (\rho^3; 3\theta)$

$(\rho^3, 3\theta) = (2\rho^2; 0)$ $\qquad 2|z|^2\ (2\rho^2; 0)$ $\quad |z| = \rho$

$\rho^3 = 2\rho \rightarrow \boxed{\rho = 2}$

è un numero reale $\rightarrow \theta = 0$ se è positivo, $\theta = \pi$ se è negativo

$3\theta = 2k\pi$

$\theta = \frac{2}{3}\pi k \rightarrow \theta = 0, \quad \theta = \frac{2}{3}\pi, \quad \theta = \frac{4}{3}\pi$

cerchio di raggio = 2

- $z = 0$
- $z = 2$

$z = 2(\cos 2/3\pi + i \sin 2/3\pi)$

$= 2(1/2 + \sqrt{3}/2\, i) = 1 + \sqrt{3}\, i$

- $z = 1 - \sqrt{3}\, i$

RICORDA

$z = a + ib \rightarrow (\rho; \theta)$

$\bar{z} = (a - ib) \rightarrow (\rho; -\theta)$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2$

$(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

$\underset{z}{(\rho, \theta)}\ \underset{\bar{z}}{(\rho; 2\pi - \theta)} = (\rho^2; 2\pi)$

(2) $z^3 = \bar{z}^4$ $\qquad z = 0$ soluz.

I. cartesiane
moltiplico tutto per z^4

$z^7 = \bar{z}^4 \cdot z^4 \rightarrow (\bar{z} \cdot z)^4 = (|z|^2)^4 = |z|^8$

$z^7 = |z|^8$ $\qquad z^4 = 1$

$z \rightarrow (\rho; \theta)$

$z^7 \rightarrow (\rho^7; 7\theta)$

$|z|^8 \rightarrow (\rho^8; 0)$

$\longrightarrow \begin{cases} \rho^7 = \rho^8 \rightarrow \rho = 1 \\ 7\theta = 2k\pi \rightarrow \theta = 2/7\, k\pi \end{cases}$

$\theta = 0, 2/7\pi, 4/7\pi, 8/7\pi, 10/7\pi, 12/7\pi$

SOLUZIONI

$z = 0$, $z = 1\ (\rho = 1, \theta = 0)$, ..., $z = \cos 12/7\pi + i \sin 12/7\pi$

Notiamo che $e^{\bar z} = e^{a-ib} = e^{a}(\cos(-b) + i\sin(-b))$

$e^{\bar z} = e^{a}(\cos b - i \sin b)$.

Quindi $e^{\bar z} = \overline{e^{z}}$

$\boxed{\text{Esercizio: verificare che } e^{-z} = \frac{1}{e^{z}}}$

③ $9e^{z} = e^{3\bar z}$ $\qquad e^{3\bar z} = (e^{\bar z})^3 = (\overline{e^{z}})^3 = \bar{w}^3$

pongo $w = e^{z}$ $\qquad \rho \neq 0$

$9w = \bar{w}^3 \to \begin{cases} 9\rho = \rho^3 \to \rho = 3 \\ \theta = -3\theta + 2k\pi \to 4\theta = 2k\pi \end{cases}$

$\theta = \frac{\pi}{2} \cdot k$

$\theta = 0, \pi/2, \pi, \frac{3}{2}\pi$

$w \to (\rho, \theta)$

$9w \to (9\rho ; \theta)$

$\bar{w} \to (\rho ; -\theta)$

$\bar{w}^3 \to (\rho^3 ; -3\theta)$

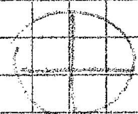
$w_1 = 0$

$w_2 = 3$

$w_3 = 3i$

$w_4 = -3$

$w_5 = -3i$. Trovato w, adesso dobbiamo trovare z.



$r=3$

$w = e^{z} = 0 \leftarrow$ impossibile

$w = e^{z} = 3$
$w = e^{z} = 3i$
$w = e^{z} = -3$
$w = e^{z} = -3i$

$e^{z} = e^{a+ib} \to (e^{a} ; b)$

$e^{z} = 3 \to (3, \pi)$. Dunque

$\begin{cases} e^{a} = 3 \to a = \log 3 \\ b = \pi \end{cases}$ $\qquad z = \log 3 + \pi i$

Analogamente si trovano le altre soluzioni. Ad esempio

$e^{z} = 3i \to (3, \pi/2)$. Dunque $\begin{cases} e^{a} = 3 \\ b = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow z = \log 3 + \frac{\pi}{2} i$.