Basi:

Def: $B = \{v_1, \dots v_m\}$ si dice BASE dello spazio V se

① $v_1 - v_m$ sono indipendenti

② $\mathrm{Span}\{v_1 - v_m\} = V$

▨ Ogni base di $\mathbb{R}^m$ ha m elementi

Teorema: Supponiamo che V abbia una base finita. Allora due basi qualunque hanno lo stesso numero di elementi, che si dice dimensione dello spazio.

DIM: Supponiamo che $\{v_1, \dots v_m\}$ sia una base. Voglio dimostrare che se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un'altra base, allora $k = m$

Supponiamo per assurdo che $m < k$

ESEMPIO: $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ spazio vettoriale non ha basi finite.

Spazio di dimensione infinita.

Esempio: $m = 3$, $k = 4$

$B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

B è una base, quindi genera:

$W_1 = \lambda_1^1 v_1 + \lambda_2^1 v_2 + \lambda_3^1 v_3$

$W_2 = \lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \lambda_3^2 v_3$

$W_3 = \lambda_1^3 v_1 + \lambda_2^3 v_2 + \lambda_3^3 v_3$

$W_4 = \lambda_1^4 v_1 + \lambda_2^4 v_2 + \lambda_3^4 v_3$

In generale: $W_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(j)} \cdot v_i \quad (j = 1, \dots, k)$

consideriamo la matrice

$$\Lambda = \begin{array}{cccc} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 \\ \lambda_3^1 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 \end{bmatrix}$$

3×4

Visto che $3 < 4$, lo spazio nullo

$N(\Lambda) \neq \{0\}$

contiene soluzioni speciali $\vec{x} \neq 0$

$$\Lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_2^1 \\ \lambda_3^1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \\ \lambda_3^2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \lambda_1^3 \\ \lambda_2^3 \\ \lambda_3^3 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \lambda_1^4 \\ \lambda_2^4 \\ \lambda_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In generale:

$$\Lambda = (\lambda_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,k}} \quad \text{dove } \lambda_{ij} = \lambda_i^{(j)}$$

Visto che $m < k$, $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^k, \vec{x} \neq 0$ t.c. $\Lambda \cdot \vec{x} = \underline{0} \in \mathbb{R}^m$

Prima coordinata: $x_1 \lambda_1^1 + x_2 \lambda_1^2 + x_3 \lambda_1^3 + x_4 \lambda_1^4 = 0$

II coordinata: $x_1 \lambda_2^1 + x_2 \lambda_2^2 + x_3 \lambda_2^3 + x_4 \lambda_2^4 = 0$

III coordinata: $x_1 \lambda_3^1 + x_2 \lambda_3^2 + x_3 \lambda_3^3 + x_4 \lambda_3^4 = 0$.

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + x_4 w_4 = x_1 (\lambda_1^1 v_1 + \lambda_2^1 v_2 + \lambda_3^1 v_3) + x_2 (\lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \lambda_3^2 v_3)$$

$$= v_1 (x_1 \lambda_1^1 + x_2 \lambda_1^2 + x_3 \lambda_1^3 + x_4 \lambda_1^4) + v_2 (x_1 \lambda_2^1 + x_2 \lambda_2^2 + x_3 \lambda_2^3 + x_4 \lambda_2^4) + \dots =$$

$$+ v_3 (\underbrace{\dots\dots}_{0}) = 0$$

Ma gli x_i non sono tutti 0 perché $\vec{x} \neq 0$, e allora $w_1 \dots w_k$ sono dipendenti. In generale se $\vec{x} \in N(\Lambda)$, $\vec{x} \neq 0$,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ Si verifica che $x_1 w_1 + \dots + x_k w_k = 0 \Rightarrow$
$w_1, \dots, w_k$ sono dipendenti "ASSURDO"

Esempio:

A matrice

Base di $N(A) = ?$

Base di $Col(A) = ?$

Ricordiamo che: $N(A) = \text{Span}\{\underbrace{S_1, \dots, S_k}_{\text{sol. speciali}}\}$

$\{S_1, \dots S_k\}$ sono una base? Sì, dunque

$\dim N(A) = \overset{\text{numero di}}{\#}$ sol. speciali $= \#$ variabili libere.

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P & L & P & L & P & L \end{array}$$

P = variabile pivot x_1, x_3, x_5
L = variabile libera x_2, x_4, x_6

Variabili libere $= x_2, x_4, x_6$

Sol. speciali

S_1	S_2	S_3
$x_2 = 1$	$x_2 = 0$	$x_2 = 0$
$x_4 = 0$	$x_4 = 1$	$x_4 = 0$
$x_6 = 0$	$x_6 = 0$	$x_6 = 1$

$$\lambda_1 \underset{\vec{S_1}}{\begin{pmatrix} * \\ 1 \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda_2 \underset{\vec{S_2}}{\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 1 \\ * \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda_3 \underset{\vec{S_3}}{\begin{pmatrix} * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ * \\ 1 \end{pmatrix}}$$

È possibile $\lambda_1 \vec{S_1} + \lambda_2 \vec{S_2} + \lambda_3 \vec{S_3} = 0$?

$\text{Span}\{\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3\} = N(A)$.

II coordinata (x_2) $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0$

IV coordinata (x_4) $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_2 = 0$

VI coordinata (x_6) $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_3 = 0$

Conclusione: le sol. speciali sono indipendenti quindi formano una base perché "generano".

— o — o — o —— Esercizio ———

$\dim(Col(A)) = ? = r = \text{rango} = \#\text{pivot}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \text{RIDOTTA} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ P\ L\ P \end{array} = S \qquad \dim(N(A)) = 1$$

Le colonne "pivot" formano una base di $Col(A)$

Attenzione!: Non prendere le colonne della matrice ridotta ma le colonne della matrice iniziale corrispondenti alle variabili pivot;

quindi: $\underset{\text{spazio col}(A)}{Col(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad Col(A) \neq Col(S)$

A matrice $m \times n$ $\quad N(A) \subseteq \mathbb{R}^n \quad Col(A) \subseteq \mathbb{R}^m$

$\dim(Col(A)) = r$ rango (#pivot)

$\dim(N(A)) = n - r$ (numero variabili libere)

ATTENZIONE: Lo spazio colonne di una matrice è in generale $\neq$ dallo spazio colonne della sua ridotta

es: $A_{2\times 3} \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \nearrow N(A) \subseteq \mathbb{R}^{n \to 3}$

$\searrow Col(A) \subseteq \mathbb{R}^{m \to 2}$

Sono in due mondi diversi

Importante.

Devo verificare 2 proprietà:

(1) $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{Col}(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

(2) $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sono indipendenti.

è inutile mettere il doppio del vettore perché multiplo del primo.

(1) Vediamolo con un esempio diverso:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&1&1&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}} \longrightarrow \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&2&3&2\\0&1&1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cccc}p&p&L&p\end{array}\end{array} = S$$

Nella matrice ridotta, la colonna libera è combinazione delle colonne pivot precedenti:

$$\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \implies S)\ 1\,\text{Col}\,I + 1\,\text{Col}\,II - 1\,\text{Col}\,III = 0$$

$$S\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \implies A\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Attenzione: I sistemi che corrispondono alle matrici A e S hanno le stesse soluzioni, cioè $N(A) = N(S)$ (spazi nulli di una matrice e della sua ridotta coincidono)

$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

cioè $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

colonna libera, difatti è comb lineare delle precedenti.

Vale per la ridotta ma anche per quella iniziale.

(2) Le colonne pivot sono indipendenti. Infatti se $\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, cioè $A\cdot\begin{bmatrix}\lambda\\\mu\\0\\\xi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, allora $S\cdot\begin{bmatrix}\lambda\\\mu\\0\\\xi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$, cioè $\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \xi\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$, ma questo accade solo se $\lambda = \mu = \xi = 0$, come si verifica facilmente.

Proprietà:

① Ogni colonna libera è comb. lin. delle colonne pivot precedenti. $Col(A) = Span\{\text{colonne pivot}\}$

② Le colonne pivot sono indipendenti

Conclusione: Le colonne pivot formano una base di $Col(A)$ (lo abbiamo visto con esempi, ma si può fare in generale con la stessa dimostrazione)

— o — o —

Esercizi sui numeri complessi

Ripasso:

forma cartesiana come $z = a + ib$ $\quad a, b \in \mathbb{R} \quad (i)^2 = -1$

$a = Re(z) \quad b = Im(z)$

forma polare $\quad \rho = \sqrt{a^2+b^2} = |z| \qquad \rho \in \mathbb{R}^{\geq 0}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{argomento}}}{arg}(z) = \theta = arctg \frac{b}{a} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$

$\bar{z} = a - ib = \text{coniugio} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$

Proprietà

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte reale di } z}}{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{immaginale}}}{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$e^{z} = e^{a+ib} = e^{a}\underbrace{(\cos b + i \sin b)}_{e^{ib}}$$

Tutto coniugato

$$e^{\bar z} = \overline{e^{z}}$$

$e^{z} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ↗ complessi

Esercizio:

Scrivere in forma cartesiana il seguente numero complesso

$$z = \frac{1+i}{1-i} - (1+2i)(2+2i) + \frac{3-i}{1+i} = a+ib$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+2i}{2} = i$$

$(1)^2+(-1)^2$

$$\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{3-i-3i-1}{2} = 1-2i$$

$$(1+2i)(2+2i) = 2+4i+2i-4$$

quindi

$$z = i+1-2i+2-6i = 3-7i = a+ib$$

Esercizio:

trovare parte reale e immaginaria di:

$\frac{1}{2-i}+\frac{1}{2+i} \qquad w = 2-i$

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{\bar w} = \frac{w+\bar w}{w\bar w} = \frac{2\,\mathrm{Re}(w)}{|w|^2} =$$

$z = \frac{1}{2-i}+\frac{1}{2+i} = \frac{4}{5} \qquad \mathrm{Re}(z) = 4/5$, $\mathrm{Im}(z) = 0$

$z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = z$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$

Calcolare parte immaginaria:

$$z = \frac{30}{3+i} = 3 \cdot \frac{|t|^2}{t} = 3 \cdot \bar{t} = 9-3i \qquad Re(z) = 9$$
$$Im(z) = -3$$

$t = 3+i \quad |t|^2 = 3^2 + i^2 = 9+1 = 10$

Esercizio:

Trovare tutte le soluzioni complesse del sistema:

$$\begin{cases} \bar{z}(z-1) = 2 + i \\ \bar{z} + z \geq 0 \end{cases}$$ usiamo forma cartesiana.

è un $2Re(z)$

Guardiamo la 1° eq.

Cerchiamo $z = a+ib$ t.c. $(a-ib)(a+ib-1) = 2+i$

$$a^2 - a + \cancel{ab}i - \cancel{ab}i + bi + b^2 = 2+i$$
$$(a^2 - a + b^2) + bi = 2+i$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - a + b^2 = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a - 1 = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} =$$

Guardiamo la 2° condizione:

$2Re(z) \geq 0 \qquad z_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + i \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + i$

$Re(z_1) < 0$ non è soluzione del sistema perché viene negativo.

z_2 è soluzione

Esercizio:

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} z+\bar{z} = i \\ z-\bar{z} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\,\mathrm{Re}(z) = i \\ 2i\,\mathrm{Im}(z) = 1 \end{cases} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

$\nexists\ a \in \mathbb{R}$ t.c. $2a = i$

$\nexists\ b \in \mathbb{R}$ t.c. $2ib \in \mathbb{R}$

Questo non ha soluzione. assurdo.

Esercizio:

trovare tutti i numeri complessi t.c. $|z| - z = i$

pongo $z = a+ib$

$$\underbrace{\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)}_{\text{parte reale}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte im}}}{ib} = i \iff \begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} - a = 0 \\ -b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a^2+1 = a^2 \\ b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

$\nexists\ z \in \mathbb{C}$ che risolve l'eq $|z| - z = i$

Esercizio: trovare tutte le soluzioni complesse di $(z-1)^2 = 1 + i\sqrt{2}$

quante sol? 2

$z = a+ib$

$z-1 = (a-1) + ib$

$(a-i)^2 - b^2 + 2\,ib(a-1) = 1 + i\sqrt{2}$

$$\begin{cases} (a-1)^2 - b^2 = 1 \\ 2(a-1)b = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)^2 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(a-1)^2} = 1 \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a-1} \end{cases}$$

pongo $t = (a-1)^2$

la prima eq diventa:

$2t^2 - 1 - 2t = 0 \longrightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

$t = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ perché $t \geq 0$ (è un quadrato)

$$|a-1| = \sqrt{t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} + 1 \\ a_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \\ b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$z_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}\, i$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}\, i$$

Esercizio ~~Descrivere~~ geometricamente l'insieme delle soluzioni di:

$(*)$ $z^2 \cdot \bar{z} = z$ $\qquad \{z \in \mathbb{C} . \ z \text{ soddisfa } (*)\}$

$(0,0)$ è soluzione di $(*)$

suppongo $z \neq 0$. L'eq diventa $z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1$

L'insieme che cerco è $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$z = a + ib$

$a^2 + b^2 = 1$ $\qquad \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$

L'insieme delle soluzioni è $\{(0,0)\} \cup$ circonferenza unitaria

$(**)\quad Re\left(z^2\right) + i\, Im\left(\bar{z}\left(1+2i\right)\right) = -3$

$z = a+ib$

$z^2 = \left(a^2-b^2\right) + 2abi$

$\bar{z}\left(1+2i\right) = \left(a-ib\right)\left(1+2i\right) = a+2b+\left(2a-b\right)i$

Quindi posso scrivere $(**)$

$a^2-b^2+i\left(2a-b\right) = -3$

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2a-b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2=\frac{b^2}{4}+3 \\ a=\frac{b}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 3b^2=12 \\ a=b/2 \end{cases}$$

Le soluzioni di $(**)$

$\{(-1,-2),\ (1,2)\}$

$(***)\quad Im\left(\left(2-i\right)z\right) = 1$

Esercizio: Si consideri il sistema $Ax = b$, dove $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

1) Sia $B = [A \mid b]$ la matrice completa del sistema. Si calcoli la matrice completa ridotta $U = [C \mid d]$

2) trovare una base di $\ker(A)$

3) " " $\mathrm{Col}(A)$ ($= \mathrm{Im}(A)$)

4) Descrivere tutte le sol. di $Ax = b$ quando $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

---

1) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & b_1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[\rho_2 - \rho_1]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & b_3 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[\rho_3 - \rho_2]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{array}\right]$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 - 1 \\ -1 + 0 - 1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{}_{C}$ $\underbrace{}_{d}$; P P

x_1, x_3 sono variabili pivot e quindi x_2, x_4, x_5 sono variabili libere

---

2) La base che cerchiamo ha 3 elementi perché 3 sono le variabili libere.

Risolvo: $Cx = 0$ dove ho dato certi valori alle variabili libere

$\begin{array}{c} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow S_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 1° sol speciale

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4 = 0 \\ x_3 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 6 = 0 \\ x_3 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow S_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Per verificare faccio $= A \cdot S_i = 0$

Risposta alla 2) $Ker(A) = Span\{S_1, S_2, S_3\}$

3) $Col(A) = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$ Si prende colonne pivot.

è anche una base

4) Cerco una soluzione particolare $Cx = d$ $\quad d = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Pongo:

$x_2 = x_4 = x_5 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \qquad S_p = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soluzione particolare

Risposta 4 L'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 \cdot S_3 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^5$$

5) Per quali vettori $b \in \mathbb{R}^3$ il sistema ha soluzione?

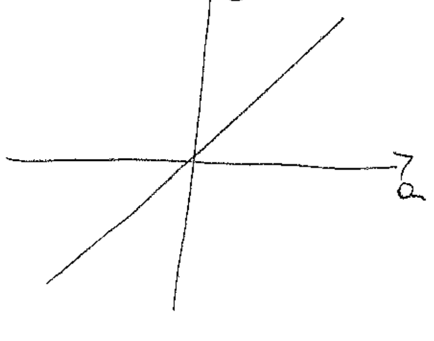
$\underbrace{b_3 - b_2 + b_1 = 0}_{\text{equ. piano in } \mathbb{R}^3}$ perché se non viene uguale a 0 non vale

$\left\{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \middle| \, b_3 - b_2 + b_1 = 0\right\}$ è un piano di $\mathbb{R}^3$

Descrivere geometricamente l'insieme delle soluzioni di

$Im((2-i)z) = 1$

$z = a + ib \qquad (2-i)(a+ib) = 2a + b + (2b-a)i \Rightarrow 2b - a = 1$



$y = 1/2\, x + 1/2$

Esercizio: Risolvere

$$\begin{cases} (\overset{\text{coniugato}}{\bar{z}} + i)^2 = 1 + 2iz \\ z^5 + 4z = 0 \end{cases}$$

Risolviamo la 2° equazione:

$z^5 = -4z$ 0 non è soluzione

$z^4 = -4$

• Moduli $|z^4| = 4 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$

$z = \sqrt{2}\, w$

$|w| = 1$

$w = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

$\sqrt{2}w^4 = 4w^4$

$w^4 = -1$

$1 = e^0$

$-1 = e^{i\pi}$ (il cos = -1 = π)

$\Downarrow$

$\cos\theta + i\sin\theta$

$\underset{\text{p. reale}}{\cos\theta = -1}$ $\quad \underset{\text{p. immaginario}}{\sin\theta = 0}$

quindi:

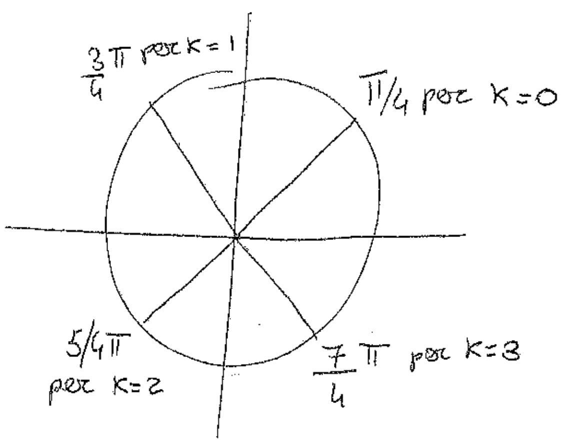
$e^{i4\theta} = e^{i\pi} \Rightarrow 4\theta = \pi$ e ~~oppure~~ $\pi + 2k\pi$ (cioè un multiplo)

$e^{\pi + 2k\pi} = e^{\pi}(\underbrace{e^{2\pi}}_{1})^k$

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \leftarrow$ deriva da questo $\left(\frac{4\theta}{4} = \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$

Argomenti:

L'argomento è un numero compreso tra $\{0, 2\pi\}$



$\theta = \pi/4,\ 3/4\pi,\ 5/4\pi,\ 7/4\pi$

$\Downarrow$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Verifica 1° eq. Faccio per $z_1 = (1+i)$

$\bar{z}_1 = 1-i$

$1^2 = 1 + 2i(1+i)$

$1 + 2i - 2 = -1 + 2i$ NO

z_1 non è soluzione
e così lo stesso per z_2, z_3, z_4

Esercizio:

$e^{2z} + e^{\bar{z}-1} = 0$ $\quad e^{2z} = -e^{\bar{z}-1}$

$\downarrow$ → ho portato di là 2° membro e diviso per lo stesso 2° membro

$e^{2z - \bar{z} + 1} = e^{i\pi}$

$z = a + ib$

$2z - \bar{z} + 1 = 2a + 2ib - a + ib + 1 = (a+1) + 3bi$

$e^{a+1} \cdot e^{3bi} = e^0 \cdot e^{i\pi}$

$\begin{cases} e^{a+1} = e^0 \iff a+1 = 0 & \text{(esponen. reale)} \\ e^{3bi} = e^{\pi i} & \text{(uguaglianza tra numeri complessi di modulo 1)} \end{cases}$

$\begin{cases} a = -1 \\ 3bi = \pi + 2k\pi \end{cases}$ => le soluzioni hanno la forma $z = -1 + \left(\pi/3 + 2/3\, k\pi\right)i$

$a + ib$

Risolvere il sistema:

$\begin{cases} e^{2z} + e^{\bar{z}-1} = 0 \\ |z|^2 \leq 9 \end{cases}$

moltiplicato per $\frac{3}{\pi}$

$|z|^2 = 1 + \left(\pi/3 + 2/3\, k\pi\right)^2 = 1 + \frac{\pi^2}{9}(1+2k)^2$

$K = 0 \quad |z|^2 < 3 \ \boxed{\text{OK}}$ $\qquad |k| \geq 2 \quad |2k| \geq 4 \qquad 3 < \pi < 4$

$k = 1 \quad |z|^2 \geq 10 \ \boxed{\text{NO}}$ $\qquad |1+2k| \geq 3 \qquad 1 \lneq \frac{\pi^2}{9} < 2$

$k = -1 \quad |z|^2 < 3 \ \boxed{\text{OK}}$ $\qquad |z|^2 > 10$

Risoluzione:

come primo diviso × 2° membro

$$\begin{cases} e^{z^3} = e^{z} \\ |z^3 - z| \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} e^{z^3 - z} = 1 \\ |z^3 - z| \leq 4 \end{cases}$$

$W = z^3 - z$

$z^3 - z = 2k\pi i$

quindi: $z^3 - z = 0$ perché l'unica compatibile con la 2° eq. $z = (a + ib)$

$|W| = 2|k|\pi \Rightarrow k = 0$

$(a+ib)^3 - (a+ib) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 - 3ab^2 - a = 0 \\ 3a^2 - b^3 - b = 0 \end{cases}$$

Verificare che le soluzioni sono $a = b = 0$, $a = \pm 1$, $b = 0$

— o — o — o

Applicazioni lineari:

V, W spazi vettoriali

$f: V \to W$ si dice applicazione lineare se

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall v \in V\ f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v)$
- $\forall v_1, v_2 \in V\ f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

Esempi:

Se A è una matrice $m \times n$

$\Rightarrow f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{x} \xrightarrow{f_A} A \cdot \vec{x}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 2×3 $\quad f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\vec{x} \xrightarrow{f} A \cdot \vec{x}$

N.B.: $A(\lambda \vec{x}) = \lambda \cdot (A \cdot \vec{x})$

$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_A} \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Ricordare che: $f_{AB} = f_A \circ f_B$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare è determinata dai valori $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dove e_i sono i vettori della base canonica

ES: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dove $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+2x_3 \end{pmatrix}$ verificare che è lineare

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \begin{matrix} x_1+x_2 \\ x_2+2x_3 \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix} x_1(1) + x_2(0) = \\ x_2(0) + 2x_3(0) = \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{idem}$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Due applicazioni lineari che hanno gli stessi valori sui vettori e_i della base canonica coincidono

Se prendo $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcolo $f\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = f(7 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3) =$

$$= 7f(e_1) + 5f(e_2) + 2f(e_3)$$

$$= 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In generale. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = f(x_1 \vec{e_1} + \dots + x_m \vec{e_m})$

$\overset{f \text{ lineare}}{=} x_1 \cdot f(e_1) + \dots + x_m f(e_m)$ che so calcolare conoscendo i valori $f(e_i)$

N.B. qualunque sia una base $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ di $\mathbb{R}^m$ se conosco i valori $f(v_i)$ $i = 1, \dots, m$ $\Rightarrow$ sono determinati tutti i valori $f(\vec{v})$ con $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$

A matrice $n \times m \leadsto f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ applicazione lineare.

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineare $\to$ Matrice associata A_f

Vediamo con l'esempio di sopra:

$$A_f = \left[f(e_1) \middle| f(e_2) \middle| f(e_3) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(e_1)$ e analogo per $f(e_2)$ ed $f(e_3)$
quindi va bene!

Dunque l'applicazione lineare determinata da A_f coincide con f, perché hanno gli stessi valori sulla base

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+2x_3 \end{bmatrix}$$

$V = \{$polinomi di grado $\leq 3\}$

V è uno spazio vettoriale

__Base?__ $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ (polinomio)

$\Downarrow$ uguale

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$(2+3x+4x^2-7x^3) + (1-3x+2x^2+5x^3) = 3+0+6x^2-2x^3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

uguale se moltiplico per scalare.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x^2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x^3$$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ sono una base di $\underbrace{\mathbb{R}[x]}_{\text{polinomi}} \leq 3$

$\downarrow$

(polinomi di grado ≤ 3 e coefficienti reali)

__Generano__ $3+7x-8x^2-9x^3$ __banale__!

$\Downarrow$

Indipendenti $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_4 \cdot x^3 = 0 \Rightarrow$ Tutti i $\lambda_i = 0$
comb. lin. dei vettori della base

Dimostrare che $\{3x, 4x^2-1, x^2\}$ formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

Fare!! Posso far corrispondere ad ogni polinomio $a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ considerando i coefficienti $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Allora $\{3x, 4x^2-1, x^2\}$ corrispondono a $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,
che formano una base di $\mathbb{R}^3$ (verificare!).
Concludo che $\{3x, 4x^2-1, x^2\}$ formano una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \quad A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Def: $f : V \to W$ applicazione lineare

- $\ker f = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$
- $\operatorname{Im} f = \{ f(v) \mid v \in V \}$

Esercizio: $\ker f$ è sottospazio di V e $\operatorname{Im} f$ è sottospazio di W
Fare!!

$$\boxed{\begin{aligned} Ker\, f &= N(Af) \\ Im\, f &= Col(Af) \end{aligned}}$$ → IMPORTANTE

Autovettori e autovalori

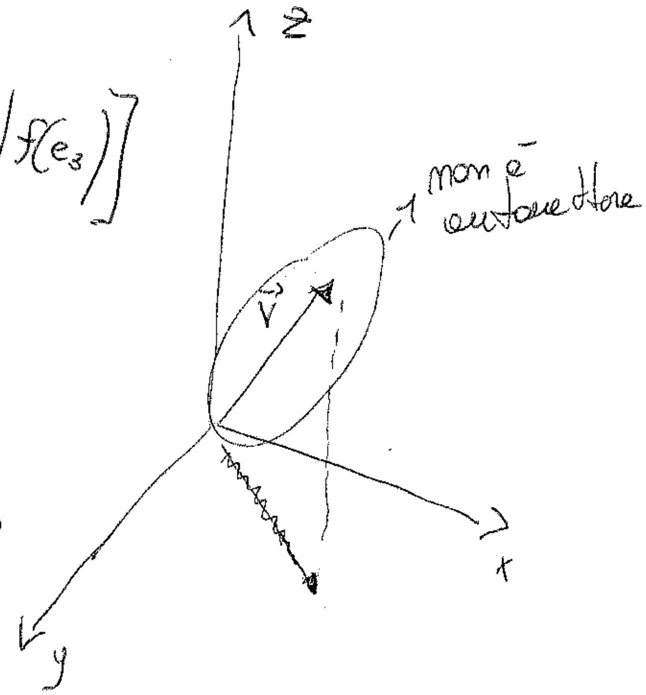
Def: Un vettore $\vec{v} \neq 0$ si dice autovettore della matrice A quadrata se $A\vec{x}$ ha la stessa direzione di $\vec{x}$, cioè se $\exists \lambda$ t.c. $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$. In questo caso, λ si dice autovalore di A.

In generale, si dà una definizione di autovettore e autovalore $\forall$ appl. lineare $f: V \to V$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'appl. lineare che "proietta" un vettore $\vec{v}$ sul piano xy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{lineare}$$

$$Af = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(e_1) \mid f(e_2) \mid f(e_3) \end{bmatrix}$$



N.B. $\lambda = 0$ è autovalore di A
$\iff N(A) \neq \{0\}$.
Infatti $\exists x \neq 0$ con $Ax = 0 \cdot x = 0$
$\iff x \in N(A)$.

N.B. tutti i vettori sul piano xy sono autovettori di autovalore $\lambda = 1$

Matrice che permuta 1ª e 2ª riga:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f_P : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autovettore di autovalore -1

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autovettori di autovalori 1

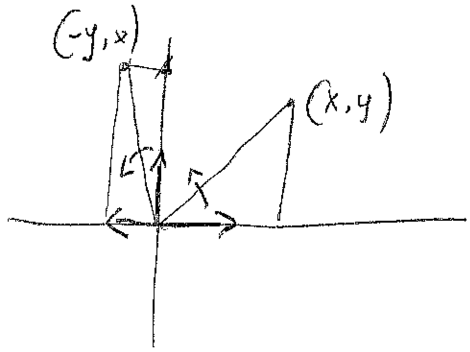
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Rotazione di $\pi/2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ perché prodotto scalare } = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non ha autovettori



Altro caso:

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e_1, e_2, e_3 sono autovettori perché:

$De_1 = 7 \cdot e_1$

$De_2 = 5 \cdot e_2$

$De_3 = -2 \cdot e_3$

Supponiamo una matrice ridotta:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $N(A) \neq \{0\}$
$\Rightarrow \forall$ vettore $\vec{v} \in N(A)$ con $(\vec{v} \neq 0)$
è un autovettore di autovalore $\lambda = 0$
perché $A \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{x}$

Come si trovano gli autovettori?

Ci sono $\vec{x} \neq 0$ e λ t.c. $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot x = 0$$

$$A \cdot \vec{x} - \lambda \cdot I \cdot x = 0$$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0$$

Trovo $\vec{x} \neq 0$ con questa proprietà $\Leftrightarrow N(A - \lambda I) \neq \{0\}$

spazio nullo

$$\Updownarrow$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esercizio:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$N\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$= (3-\lambda)(5-\lambda) - 1 \cdot 0 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$
$\lambda = 5$

polinomio caratteristico di A.

$\lambda = 3$, $\lambda = 5$ autovalori

- $\lambda = 3$ Autovettori $\vec{v} \in N(A - \lambda I) = N\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di autovalore $\lambda = 3$

Tutti gli autovettori relativi all'autovalore λ sono in $N(A - \lambda I)$. Dunque formano un sottospazio che si chiama autospazio dell'autovalore λ.

- $\lambda = 5$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore perché $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in N\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ Appl. lineare

$Ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) = 0\}$

$Im(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^m\}$

A_f matrice associata (rispetto alla base canonica)

$A_f = [f(e_1) \cdots | f(e_m)]_{n \times m}$

$A_f \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1 f(e_1) + \dots + x_m f(e_m) = (f \text{ lineare}) = f(x_1 e_1 + \dots$
$\dots + x_m \cdot e_m) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$. Ad esempio

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

Un'applicazione lineare è determinata dai suoi valori su una base.

1) $N(A_f) = ker f$ $\quad \vec{x} \in N(A_f) \Leftrightarrow A_f \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow f(\vec{x}) = 0$
visto che $A_f = f$

2) $Col(A_f) = Im f$

$Col(A_f) \overset{def}{=} Span\{\text{colonne di } A_f\} = Span\{f(e_1), \dots, f(e_m)\}$

Devo verificare che $Im f = Span\{f(e_1), \dots, f(e_m)\}$

$\supseteq$ Sia $y \in Span\{f(e_1), \dots, f(e_m)\}$ allora $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$ t.c. $y = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_m (e_m)$. Ma allora $y = f(\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m \cdot e_m}_{x}) \in Im f$

$\subseteq$ Sia $f(x) \in Im f$

Scrivo $x = X_1 e_1 + \dots + X_m e_m \Rightarrow f(x) = f(x_1 e_1 + \dots x_m e_m) =$
$= x_1 f(e_1) + \dots + X_m f(e_m) \in Span\{f(e_1), \dots, f(e_m)\}$

Teorema: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ appl. lineare.

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im} f) = m$

$A_f = [\,|\,|\,|\,|\,]$
m colonne
(r colonne pivot e m - r colonne libere)

$\dim(N(A_f)) = \#$ variabili libere
(base = soluzioni speciali)

$\dim(\mathrm{Col}(A_f)) = r$ rango (numero colonne pivot)

(base = colonne pivot di A_f) (non della ridotta)!

esempio:

$f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$
$\Rightarrow \dim(\ker f) \geq 2$
perché $\dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im} f) = 5$
Ma $\dim(\mathrm{Im} f) \leq 3$ perché è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$
$\Downarrow$
$\dim(\ker f) \geq 2$

Prop: $f\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ appl. lineare.
è iniettiva $\Leftrightarrow$ $\ker f = \{0\}$

dim:
$\Rightarrow$ So che f lineare $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in \ker f$
Se per assurdo avessi $x \neq 0$ nel nucleo, allora f non sarebbe iniettiva perché $f(x) = 0 = f(0)$ dove $0 \neq x$

$\Leftarrow$
Sappiamo che $\ker f = \{0\}$. devo dimostrare che f è iniettiva:
IPOTESI TESI

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = 0 \underset{f \text{ lineare}}{\Leftrightarrow} f(x-y) = 0 \Leftrightarrow$
$x - y \in \ker f = \{0\} \Rightarrow x - y = 0$, cioè $x = y$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ endomorfismo (cioè appl. lineare di uno spaz. vett. in se stesso)

Sono tutte proprietà equivalenti:

1. f iniettiva
2. f suriettiva
3. f biunivoca
4. $\det(A_f) \neq 0$
5. A_f invertibile
6. $\text{Rango}(A_f) = n = \dim(\text{im} f)$
7. $\ker(A_f) = \{0\}$

Simile a: $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ da un insieme finito in se stesso.
f iniettiva $\Leftrightarrow$ f suriettiva $\Leftrightarrow$ f biunivoca.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare $\quad$ f iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$, cioè $\dim(\ker f) = 0$

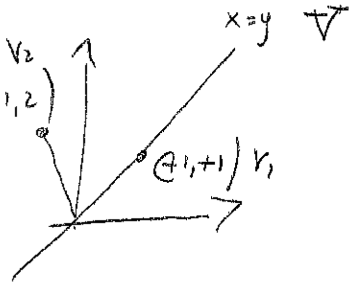
Ma allora $\dim(\text{Im} f) = n - 0 = n$
Ma $\text{Im} f$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ avente dimensione $n \overset{?}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \text{Im} f = \mathbb{R}^n$ cioè f è suriettiva.

Vedremo fra poco la dimostrazione di questa proprietà:
" V sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n \Rightarrow V = \mathbb{R}^n$ "

Metodo completamento delle basi

V sp. vettoriale di dimensione n.

Prendo $v_1 \neq 0$ Se Span $\{v_1\} = V$



Allora $\beta = \{v_1\}$ è una base ed ho finito.

Altrimenti prendo $v_2 \notin$ Span $\{v_1\}$

N.B. $\{v_1, v_2\}$ sono indipendenti.

Se Span $\{v_1, v_2\} = V$ allora $\beta = \{v_1, v_2\}$ è una base

Altrimenti prendo $v_3 \notin$ Span $\{v_1, v_2\}$ N.B $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono indipendenti.

In generale vale la seguente proprietà:

Se $v_1, \dots v_m$ sono indipendenti e se $w \notin$ Span $\{v_1, \dots v_m\}$ allora $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ sono indipendenti.

Non posso avere più di n vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$, quindi mi devo fermare prima.

Caso $n = 2$

$v_3 \notin$ Span $\{v_1, v_2\} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ indipendenti. Infatti

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

altrimenti potrei scrivere

$v_3 = -\lambda_1/\lambda_3 \, v_1 - \lambda_2/\lambda_3 \, v_2 \in$ Span $\{v_1, v_2\}$

Ma se $\lambda_3 = 0$, ho $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ e $\{v_1, v_2\}$ indipendenti.

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Il caso generale si ottiene iterando questo procedimento (dimostrazione per induzione su n)

• W sottospazio di $\mathbb{R}^n$ con dim $(W) = n \Rightarrow W = \mathbb{R}^n$

dim:

Prendo $w_1, \dots, w_n$ base di W

Se span $\{w_1, \dots, w_n\} = W = \mathbb{R}^n$ allora ho finito

Se fosse Span $\{w_1, \dots, w_n\} = W \neq \mathbb{R}^n$, potrei completare ad una base $\{w_1, \dots w_n, v_1, \dots, v_k\}$ di $\mathbb{R}^n$

Assurdo perché avrei una base di $\mathbb{R}^n$ con $n+k > n$ elementi.

Autovettori e diagonalizzabilità

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ endomorfismo.

λ autovalore se $\exists v \neq 0$ $f(v) = \lambda v$

Un tale v si dice autovettore di autovalore λ.

• λ autovalore $\Leftrightarrow N(A_f - \lambda I) \neq \{0\}$

e $N(A_f - \lambda I)$ si dice autospazio dell'autovalore λ e contiene tutti gli autovettori di autovalore λ e anche il vettore 0.

Esempio: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ t.c. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 4x+3y \end{pmatrix}$ lineare ok!

$A_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$ $\quad \lambda$ autovalore

$\Updownarrow$

$\text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

$[f(e_1) | f(e_2)]$ $\quad (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Av = \lambda v$

$\underbrace{\det(A - \lambda I)} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 0 \cdot 4 = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$P_A(\lambda)$ = polinomio caratteristico.

(e' il determinante di $A - \lambda I$)

• Se A e' una matrice $n \times n$, il polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$ ha grado n

ness:

autovalori : $\lambda = 2$, $\lambda = 3$

autovettori per $\lambda = 2$ $N(A-2I) = N\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\right) \rightarrow \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} +1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ $\qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} +1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftarrow$ verifica

Uguale per $\lambda = 3$

$N\left(\begin{bmatrix} (2-3) & 0 \\ 4 & (3-3) \end{bmatrix}\right) = N\left(\begin{bmatrix} -1 & \phi \\ 4 & \phi \end{bmatrix}\right) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore $\lambda = 2$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ " " $\lambda = 3$

$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

(Ricordare che $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ formano una base $\Leftrightarrow$ $B = [v_1 | \dots | v_n]$ è invertibile $\Leftrightarrow \det B \neq 0$)

$\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ matrice della base di autovettori.

$A \cdot B = [A \cdot b_1 | A \cdot b_2] = \left[A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \;\vdots\; A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[2\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \;\vdots\; 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

autovettori

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$

$B \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [b_1 | b_2]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [2b_1 | 3b_2]$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

matrice diagonale degli autovalori

In generale se

$\{v_1, \dots v_n\}$ sono una base di autovettori con $Av_i = \lambda_i v_i$

e se $B = [v_1 | \dots | v_n]$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, allora

$$A \cdot B = B \cdot D \iff B^{-1} A B = D \iff A = B D B^{-1}$$

In questo caso A si dice diagonalizzabile.

$$A = B^{-1} D \cdot B \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

→ VEDI FORMULA per l'inversa di una matrice 2x2

dove $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

esempio: $A^{12} = \underbrace{(B^{-1} D B)}_{A} \underbrace{(B^{-1} D B)}_{A} \dots \underbrace{(B^{-1} D B)}_{A}$ (12 volte), con $B B^{-1} = I$

$$= B^{-1} D^{12} B = B^{-1} \begin{bmatrix} 2^{12} & 0 \\ 0 & 3^{12} \end{bmatrix} \cdot B$$

Def: A è diagonalizzabile se $\exists$ B invertibile t.c. $B^{-1} A B = D$ è diagonale.

Teorema. A è diagonalizzabile $\iff$ ha una base di autovettori. $v_1, \dots, v_n$

In questo caso $B = [v_1 | \dots | v_n]$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ dove $Av_i = \lambda_i v_i$

v_1 autovettore di autovalore λ_1

v_2 " " λ_2

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora v_1 e v_2 sono indipendenti

Dim: Supponiamo $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0$

Ma allora $A(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \mu_1 A v_1 + \mu_2 A v_2 = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 = 0$

Inoltre, moltiplicando per λ_1, $\mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_1 v_2 = 0$

$\Downarrow$

$\mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 = 0$ sottraggo

$\mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_1 v_2 = 0$

$\mu_2 \lambda_2 v_2 - \mu_2 \lambda_1 v_2 = 0$

$\mu_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$ dove $v_2 \neq 0$ $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$

$\Downarrow$

$\mu_2 = 0$ Analogamente si vede $\mu_1 = 0$

Se $v_1 - v_n$ sono autovettori di autovalori diversi, allora sono indipendenti.

~~[illegible]~~

Vale anche con $v_1, \dots v_n$ con n qualunque.

Corollario: Se ho n autovalori diversi di una matrice $n \times n$, allora è diagonalizzabile. Importante!!!

Infatti gli n autovettori relativi a quegli n autovettori sono indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}^n$

Determinante: nuova definizione

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

M_{12}

M_{13}

$\det(A) = a_{11} \cdot \det M_{11} - a_{12} \det M_{12} + a_{13} \det M_{13}$

1. scelgo una riga o una colonna (scelgo la prima riga)

$=$

M_{1J} la sottomatrice 2×2 di A che si ottiene da A cancellando la riga 1 e la colonna J

$$= \sum_{J=1}^{3} (-1)^{J+1} \cdot a_{1J} \det M_{1J}$$

Se scelgo la prima colonna

$$\sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_{i1}$$

Calcoliamo il det di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ in 3 modi diversi

1) regola dei triangoli

$2-2+0+12-0-0=12$

2) rispetto alla prima riga

$1 \cdot 2 - 0 \cdot ? + 2 \cdot 5 = 12$

3) rispetto alla prima colonna

$1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 12$

Definire per ricorrenza il det di una matrice $n \times n$

$n = 1 \quad A \in \mathbb{R} \quad \det A = A \in \mathbb{R}$

Se A è $n \times n$, indico con M_{ij} la sottomatrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

$$\underset{\text{FISSO } i}{\det A :=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j} a_{ij} \det M_{ij} \underset{\text{FISSO } j}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} \det M_{ij}$$

Esercizio: Verificare che funziona per $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Esercizio: Calcolare il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ scelgo la prima riga

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot ? - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot ? =$$

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot ? - \left(-1 \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot ?\right);$$

$$= \cancel{1} - \cancel{4} + 14 - 7 - 9 = -3$$

Esercizio rifare calcolo facendo altre scelte di riga o colonna

Esercizio: considero l'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita $(x, y, z) \xrightarrow{\text{INVIATA}} (3x-2y,\ x+y+z,\ 2x-3y-z)$

1) Determinare la matrice A associata a T (rispetto alla base canonica) le colonne di A sono $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$

$$T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Determinare dimensione e una base del nucleo $N(T)$ e dell'immagine $Im(T)$

Riduzione a scala di A

$$\xrightarrow{\substack{\rho_2 - \frac{3}{2}\rho_1 \\ \rho_3 - \frac{1}{3}\rho_1}} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7/3 & 1 \\ 0 & -7/3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\rho_3 + \rho_2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Im(T) = 2$ (# colonne pivot), $\dim N(T) = 3 - \dim Im(T) = 1$

$$Im(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Risolviamo sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variabile libera} = 1}}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/7 \\ y = -3/7 \\ z = 1 \end{cases} \quad N(T) = \overbrace{\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle}^{\text{generato}}$$

3) T iniettiva? Suriettiva?

NO — NO

T iniettiva $\Updownarrow$ $\dim N(T) = 0$

T è suriettiva $\Updownarrow$ $\dim Im(T) = 3$

4) Verificare che l'insieme

$$B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}; \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

È una base di $\mathbb{R}^3$?

$\Downarrow$

$\Updownarrow$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad = 1\cdot 1 \neq 0$$

5) Qual'è la matrice B associata a T se invece che la base canonica considero la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$

B ha come colonne $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ espresse nella base $\mathcal{B}$

$$T(v_1) = (4,3,1) = 4e_1 + 3e_2 + 1e_3$$
$$T(v_2) = (1,2,-1)$$
$$T(v_3) = (-2,2,-4)$$

Cerco $\underset{i=1,2,3}{T(v_i)} = \underset{\uparrow}{a_i} v_1 + \underset{\uparrow}{b_i} v_2 + \underset{\uparrow}{c_i} v_3$

Sto cercando a_i, b_i, c_i avendo v_i, v_1, v_2, v_3

$$\underbrace{\left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right)}_{P}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = T(v_i)$$

cerco Q che esprime e_1, e_2, e_3 in termini di v_1, v_2, v_3

$$\boxed{Q = P^{-1}}$$

invertiamo P

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\delta_2 - \delta_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\delta_1 - 2\delta_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1/2\,\delta_1,\ 2\delta_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

$$\underset{A \cdot P}{A \cdot P \cdot P^{-1}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{B}{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -8 \\ 0 & 5 & 14 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}}$$

P matrice con colonne v_1, v_2, v_3 rispetto base canonica, noi vogliamo la base avendo le colonne

Esercizio: Per $k \in \mathbb{R}$, sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \mapsto (x+y,\ kx+y+z,\ kx+y+kz)$$

1) Determinare la matrice associata a T

$$A = \left(T(e_1) \,/\, T(e_2) \,/\, T(e_3)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

2) Determinare la dimensione e una base di $Im(T)$ e che $N(T)$ al variare di k. Per quali valori di k A è invertibile?

$$\xrightarrow{\ }\quad \begin{matrix} S_3 - S_2 \\ S_2 - kS_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

$k \neq 1$, allora ci sono 3 pivot $\dim(Im(T)) = 3$ e una base è data dalle colonne di A

$k = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Im(T) = 2$ e una base è data da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

se $k \neq 1$ $\dim N(T) = 0$ (A è invertibile)

se $k = 1$ $\dim N(T) = 1$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ base di } N(T)$$

3) Stabilire se il vettore $v = (0, 1, -1) \in$ a $Im(T)$ e in caso positivo, esprimere v come combinazione lineare degli elementi della base di $Im(T)$

$K \neq 1$ $\quad v \in Im(T)$ perché T surgettiva

$v = a v_1 + b v_2 + c v_3$

Vogliamo risolvere

$$\underbrace{A}_{\text{dipende da } k}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ridurre (A/v)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & k & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\rho_3-\rho_2 \\ \rho_2-k\rho_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\rho_2-\frac{1}{k-1}\rho_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & \frac{k+1}{k-1} \\ 0 & 0 & k-1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\rho_1-\frac{1}{1-k}\rho_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{1-k}\cdot\frac{k+1}{k-1} \\ 0 & 1-k & 0 & \frac{k+1}{k-1} \\ 0 & 0 & k-1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{k+1}{(1-k)^2} \\ b = -\frac{k+1}{(1-k)^2} \\ c = \frac{-2}{k-1} \end{cases}$$

$K = 1$ $\quad Im(T) = \langle v_1, v_3 \rangle$

cerco a, b t.c. $v = a v_1 + b v_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a+b = 1 \\ a+b = -1 \end{cases} \quad \emptyset$$

$\Downarrow$

$v \notin Im(T)$ quando $k=1$

4) Per $k=2$ trovare $w \in \mathbb{R}^3$ t.c. $T(w)=v$

$$\underset{T(w)}{\underset{\parallel}{v}} = 3\underset{T(e_1)}{v_1} - 3\underset{T(e_2)}{v_2} - 2\underset{T(e_3)}{v_3} = T(3e_1 - 3e_2 - 2e_3)$$

$\Rightarrow w = 3e_1 + 3e_2 - 2e_3$ quindi

T iniettiva

Esercizio: Data l'applicazione lineare

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x, y+3z, x+y+3z)$$

1) Calcolare la matrice A associata a T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$T(e_1), T(e_2), T(e_3)$

2) trovare gli autovalori di T

polinomio caratteristico di A

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot((1-\lambda)(3-\lambda)-3)$$

$$= (1-\lambda)(\cancel{3}-\lambda-3\lambda+\lambda^2\cancel{-3}) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-4)$$

autovalori sono $0, 1, 4$ (zeri di $P_A(\lambda)$)

3) trovare autovettori e autospazi, stabilire se T è diagonalizzabile.

λ autovalore

autovettore v $\quad Av = \lambda v \iff (A-\lambda I)v = 0$

$\iff v \in N(A-\lambda I) =$ autospazio E_λ

$\lambda = 0$

$$A - 0 \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_3 - \rho_2 - \rho_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dim E_0 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases} \qquad E_0 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soluzione speciale.

$\lambda = 1$

$$A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_1 \leftrightarrow \rho_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dim E_1 = 1$$

Troviamo una soluzione speciale:

$$\begin{cases} x + 1 + 2z = 0 \\ y = 1 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 4$

$$A - 4 \cdot I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_3 + \frac{1}{3}\rho_1 + \frac{1}{3}\rho_2]{} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dim E_4 = 1$$

$$\begin{cases} -3x = 0 \\ -3y + 3 = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow E_4 = \mathrm{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ la somma delle dimensioni degli autospazi è uguale alla dimensione dello spazio.

4) Trovare una base di autovettori, la forma diagonale e le matrici di cambiamento di base dalla base canonica a $\mathcal{B}$ e viceversa.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{matrice di cambiamento di base } \mathcal{C} \to \mathcal{B}$$

base E_0 base E_1 base E_4

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{D}$$

5) Calcolare A^n

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A^2 = (PDP^{-1})(P \cdot DP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = (PD^2P^{-1})(P \cdot D \cdot P^{-1}) = P \cdot D^3 P^{-1}$$

$$A^n = P \cdot D^n P^{-1}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4^n \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+4^{n-1} & 4^{n-1} & 3 \cdot 4^{n-1} \\ 4^{n-1} & 4^{n-1} & 3 \cdot 4^{n-1} \end{pmatrix}}_{A^n}$$

Esercizio: Per le seguenti matrici

1) Calcolare il polinomio caratteristico

2) Calcolare gli autovalori e di dimensioni degli autospazi.

3) discutere la diagonabilità.

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

1) $p_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)[(5-\lambda)(-2-\lambda)+6]-$

$-1(-7(-2-\lambda)-6)-(-42+6(5-\lambda))) = (-3-\lambda)(-10-5\lambda+2\lambda+\lambda^2+6)+$

$-14-7\lambda+6+42-30+6\lambda = (-3-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)+4-\lambda =$

$= (-3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-4)-(\lambda-4)$

fattorizzo il polinomio di 2° grado:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2} < \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix}$$

$= (\lambda-4)(-3\lambda-3-\lambda\cdot\lambda-\lambda) = (\lambda-4)(\lambda^2+4\lambda+4)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\lambda-4)(\lambda+2)^2$

fattorizzo il polinomio di 2° grado

$\lambda_{1,2} = -2\pm\sqrt{4-4} = -2$

Autovalori sono 4 e -2 (doppio)

$\dim E_4 = 1$

$\dim E_{-2} = ?$

$E_{-2} = N(A+2I)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\rho_3-6\rho_1]{\rho_2-7\rho_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \dim E_{-2} = 1$$

B è diagonalizzabile? <u>No</u>!

Esercizio Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si discute la diagonalizzabilità di

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (k-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ k-1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (k-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)$$

autovalori sono $1, 2, 3, k$

$k \neq 1, 2, 3$ quindi 4 autovalori distinti $\to A$ diagonalizzabile

$k=1$

calcolare $\dim E_1$

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\delta_3 \leftrightarrow \delta_4]{2\delta_4 + \delta_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\delta_3 - 4\delta_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim E_1 = 1 \to$ non diagonalizzabile

$k=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \dim E_2 = 2 \\ \to \text{diagonalizzabile.} \end{array}$$

$k=3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\delta_2 + 2\delta_4]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \delta_3 \\ \to \delta_2 \\ \to \delta_4 \\ \to \delta_1 \end{array}$$

Matrice Trasposta

Def Sia $A = (a_{ij})$ $m \times n$
la trasposta di A si indica ${}^tA = (b_{ij})$ $n \times m$
definita così

$\forall i = 1, \dots, n$ $b_{ij} = a_{ji}$

$\forall j = 1, \dots, m$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ → scambiato righe e colonne
cioè la j-esima colonna di A diventa
la j-esima riga di ${}^tA$ la $i$esima riga di
A diventa la i esima colonna di ${}^tA$

ρ righe $\rho_i^A = \gamma_i^{{}^tA}$

γ colonna $\gamma_j^A = \rho_j^{{}^tA}$

Definizione: una matrice quadrata M $n \times n$ è simmetrica
se $\forall i, j = 1, \dots, n$ $a_{ij} = a_{ji}$

Esempi: matrici diagonali, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

OSS: M simmetrica $\iff$ ${}^tM = M$ $\rho_i^M = \gamma_i^M$

Teorema Sia A $m \times n$. Allora $\underset{m \times m}{A \cdot {}^tA}$ e $\underset{n \times n}{{}^tA \cdot A}$ sono simmetriche

dimostrazione

$C = A \cdot {}^tA = (c_{ij})$ $c_{ij} = \rho_i^A \cdot \gamma_j^{{}^tA} = \rho_i^A \cdot \rho_j^A$

Calcolo $c_{ji} = \rho_j^A \cdot \gamma_i^{{}^tA} = \rho_j^A \cdot \rho_i^A$

Teorema A, B quadrate $n \times n$

1) ${}^t(A \cdot B) = {}^t(B) \cdot {}^tA$

2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

dimostriamo

$A \cdot B = C = (c_{ij}) \qquad c_{ij} = \rho_i^A \cdot \gamma_j^B$

${}^tC = (\tilde{c}_{ij}) \qquad \tilde{c}_{ij} = c_{ji} = \rho_j^A \cdot \rho_i^B$

$D = {}^tB \cdot {}^tA = (d_{ij})$

$d_{ij} = \rho_i^{{}^tB} \gamma_j^{{}^tA} = \gamma_i^B \rho_j^A \qquad \tilde{c}_{ij} = d_{ij}$

OSS: ${}^t({}^tA) = A$

Matrici trasposte ${}^tA \qquad A_{m \times n} \rightsquigarrow {}^tA_{n \times m}$

Matrici simmetriche $A = {}^tA$ (solo per matrici quadrate)

${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

A invertibile $\Rightarrow ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

DIM. ${}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI = I$ e analogamente ${}^tA \cdot {}^t(A^{-1}) = I$.

☒ Se A è simmetrica, allora autovettori relativi ad autovalori diversi sono $\perp$

DIM: Supponiamo $Ax = \lambda x$ e $Ay = \mu y$ dove $\lambda \neq \mu$ sono autovalori diversi

1 riga　　1 colonna

N.B. = ${}^tx\,y$ corrisponde al prodotto scalare tra x e y, che denotiamo $(x|y)$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$(x|y) = {}^tx \cdot y = [x_1 \cdots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

quindi

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = {}^t(\lambda x)\cdot y = {}^t(Ax)\cdot y = ({}^t x \cdot {}^t A)\cdot y =$$

$$= {}^t x\,({}^t A y) = {}^t x\,(Ay) = (x|Ay) = (x|\mu y) = \mu(x|y)$$

Abbiamo ottenuto che

$$\lambda(x|y) = \mu(x|y) \iff (x|y)(\underset{\neq 0}{\lambda-\mu}) = 0 \overset{\text{implica}}{\Rightarrow} (x|y) = 0 \text{ cioè } x \perp y$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrice senza autovalori reali

(rotazione di $\pi/2$) $\quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \to$ rotazione $\forall \theta$ di un angolo

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \quad \det(A-\lambda I) = P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i$

AUTOVALORI COMPLESSI

polinomio caratteristico.

Ragioniamo in $\mathbb{C}^2$ -> numeri complessi

Autovettori di autovalore i $\quad Aut(A, i) = N(A - iI) = N\left(\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\right)$

autospazio $\quad$ ha dim 1

quindi:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

AUTOSPAZIO dell'AUTOVALORE i

Verifica: $i\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ $\quad Aut(A, i) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore di autovalore i

Analogamente si trova che $\begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$ è autovettore di autovalore $-i$

- A simmetrica $\Rightarrow$ A ha autovalori reali

DIM: Prendo $x \neq 0$ e λ autovalore complesso

$Ax = \lambda x$. Voglio dimostrare che $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$ (si moltiplica per ${}^t\bar{x}$) $\quad x = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{bmatrix}$

$${}^t\bar{x} A \cdot x = {}^t\bar{x} \lambda x = \lambda\, {}^t\bar{x} x$$

coniugato. (coniugo ognuna delle coordinate)

① ${}^t\bar{x} \cdot x \in \mathbb{R}$ $\quad [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n] \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \bar{z}_1 z_1 + \dots + \bar{z}_n z_n \in \mathbb{R}$

prodotto scalare $\quad$ (Ricordare: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$)

② ${}^t\bar{x} \cdot A \cdot x \in \mathbb{R}$

prodotto scalare "particolare" determinato dalla matrice A.

~~^{tt}~~ ${}^t\bar{x} A x$ è un numero, cioè una matrice 1×1, quindi coincide con la propria trasposta.

$$= {}^t({}^t\bar{x} \cdot Ax) = {}^tx \cdot {}^tA \cdot {}^{tt}\bar{x} = {}^tx A \cdot \bar{x} \quad (\text{Infatti } {}^tA = A \text{ e } {}^{tt}x = x)$$

Dunque ${}^t\bar{x} \cdot Ax = {}^tx \cdot A \cdot \bar{x}$.

Per vedere che si tratta di un numero reale mostro che è uguale al proprio coniugato.

$(a + ib = a - ib \rightarrow b = 0)$

$$(*) = {}^t\overline{\bar{x} \cdot A \cdot x} = {}^t\bar{\bar{x}} \cdot \bar{A} \cdot \bar{x} = {}^tx \cdot A \cdot \bar{x} = {}^t\bar{x} \cdot A \cdot x$$

$A = \bar{A}$ perché A ha coefficienti reali che sono uguali ai propri coniugati.

Inoltre $\bar{\bar{x}} = x$ (coniugato 2 volte)

Adesso $\quad {}^t\bar{x} \cdot A \cdot x = \lambda\, {}^t\bar{x} \cdot x \implies$

$$\lambda = \frac{{}^t\bar{x} \cdot A \cdot x}{{}^t\bar{x} \cdot x} \quad \text{dove} \quad {}^t\bar{x} \cdot A \cdot x \in \mathbb{R} \text{ e } {}^t\bar{x} \cdot x \in \mathbb{R}.$$

Si conclude che $\lambda \in \mathbb{R}$.

Basi ortogonali:

$B = \{v_1, \dots v_n\}$ base t.c. $v_i \perp v_j$ per ogni $i \neq j$

N.B. Se $v_1^{\neq 0} \perp v_2^{\neq 0}$, allora sono indipendenti

DIM: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Rightarrow 0 = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 / \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) =$

$$= \lambda_1^2 \underset{\underset{\neq 0}{\|v_1\|^2}}{(v_1/v_1)} + \lambda_1 \lambda_2 \cancel{(v_1/v_2)} + \lambda_2 \lambda_1 \cancel{(v_2/v_1)} + \lambda_2^2 \underset{\|v_2\|^2 \neq 0}{(v_2/v_2)}$$

$$\lambda_1^2 \|v_1\|^2 + \lambda_2^2 \|v_2\|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

- Esercizio:

Se $v_1 \dots v_n$ sono a due a due $\perp$, allora sono indipendenti

Sia $B = \{v_1, \dots v_n\}$ base ortogonale.

Se $A = [v_1 | \dots | v_n]$, considero ${}^tA \cdot A$.

$${}^tA = \begin{bmatrix} v_1 \\ \hline v_2 \\ \hline v_n \end{bmatrix} \qquad {}^tA \cdot A = \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \|v_n\|^2 \end{bmatrix}$$ Viene fuori matrice diagonale.

Posto 1,1 ${}^tv_1 \cdot v_1 = \|v_1\|^2$

Posto 1,2 ${}^tv_1 \cdot v_2 = 0$ 1,3 ${}^tv_1 \cdot v_3 = 0$ ecc.

${}^tA \cdot A$ al posto i,j ha il prodotto scalare $(\text{col } i / \text{col } j)$ COLONNA i COLONNA j

B si dice base <u>ortonormale</u> se è una base ortogonale fatta di vettori di modulo 1

$B = \{v_1, \dots v_m\}$ base ortonormale.

$Q = [v_1 | \dots | v_m]$ $\quad {}^tQ \cdot Q = I$

Q è invertibile e $Q^{-1} = {}^tQ$

Matrici t.c. ${}^tQ \cdot Q = I$ si chiamano <u>ortogonali</u> (anche se dovrebbero chiamarsi ortonormali)

- Le matrici ortogonali preservano i prodotti scalari, le lunghezze dei vettori, e gli angoli formati tra vettori

DIM: Q ortogonale

① $(Qx | Qy) = {}^t(Qx) \cdot Qy = {}^tx\, ({}^tQ \cdot Q) y = {}^tx \cdot I \cdot y = {}^tx \cdot y = (x/y)$

② $\|Qx\|^2 = (Qx / Qx) = (x/x) = \|x\|^2$

③ Se x e y formano un angolo di θ, $\cos\theta = \dfrac{(x/y)}{\|x\|\,\|y\|} = \dfrac{(Qx/Qy)}{\|Qx\|\|Qy\|} = \cos\varphi$

dove φ è l'angolo formato da Qx e Qy

<u>esempio:</u>

$$B = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\} \text{ base}$$

<u>Gram-Schmidt</u>: METODO per trovare basi ortogonali

$v_2' = v_2 - \dfrac{(v_2/v_1)}{(v_1/v_1)} v_1$. Allora $v_1 \perp v_2'$

Nel nostro esempio: $V_2' = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} - \frac{\overbrace{(v_2|v_1)}^{=2}}{\underbrace{(v_1|v_1)}_{=2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$(v_2'|v_1) = (v_2|v_1) - \frac{(v_2|v_1)}{\cancel{(v_1|v_1)}} \cdot \cancel{(v_1|v_1)} = 0$$

Verifica che $v_2' \perp v_1$

Formula analoga per trovare v_3':

$$V_3' = V_3 - \frac{(V_3|V_2')}{(V_2'|V_2')} \cdot V_2' - \frac{(V_3|V_1)}{(V_1|V_1)} V_1$$

(V_2':) Vettore ortogonale trovato prima

Nel nostro esempio:

$$= \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} - \frac{\overbrace{(V_3|V_2')}^{-6}}{\underbrace{(V_2'|V_2')}_{6}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} - \frac{\overbrace{(V_3|V_1)}^{6}}{\underbrace{(V_1|V_1)}_{2}} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Base ortogonale

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Ora si normalizza dividendo per le lunghezze:

$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{normalizzo}]{} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ha lunghezza 1

$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

è una matrice ortogonale

$${}^tQ \cdot Q = \mathbb{1}$$

Esercizio: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ appl. lineare e V sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

① Se $V = \text{Span}\{v_1, \dots v_k\}$ allora $f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}$ è un sottospazio e $f(V) = \text{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$

② Se $v_1 \dots v_k$ è una base di V e f è iniettiva allora $\{f(v_1), \dots, f(v_k)\}$ è una base di $f(V)$

V, W sottospazi di $\mathbb{R}^n$

① In genere, $V \cup W$ non è un sottospazio.

esempio:

asse x e asse y — V e W sottospazi di $\mathbb{R}^2$ ma la unione no!

V — W

② $V \cap W$ è un sottospazio (verificare per esercizio)

③ $\text{Span}(V \cup W) = V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$
(verificare per esercizio)

$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$ TEOREMA di GRASSMANN

Dim: Prendo $u_1, \dots u_k$ base di $V \cap W \to k$ dimensione

Completo ad una base di $V \to k+n$ dimensione $u_1 \dots, u_k, v_1, \dots v_n$

Completo ad una base di $W \to k+m$ dimensione $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots w_m$

Ho la tesi se dimostro che $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots w_m$ sono una base di $V+W$, che ha quindi dimensione $k+n+m$.

Generano? Sì. Infatti prendo un qualunque $v+w \in V+W$

$v \in V \Rightarrow \exists\ \lambda_i, \mu_j$ t.c. $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

$w \in W \Rightarrow \exists\ \varepsilon_i, \eta_i$ $w = \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_k u_k + \eta_1 w_1 + \dots + \eta_m w_m$

$v+w=(\lambda_1+\varepsilon_1)u_1+\dots+(\lambda_k+\varepsilon_k)u_k+\mu_1 v_1+\dots+\mu_m v_m+\eta_1 w_1+\dots$
$\dots+\eta_m w_m \in \text{Span}\{u_1,\dots,u_k, v_1 - v_n, w_1 - w_m\}$.

Sono indipendenti? Si! . Infatti, supponiamo che

$$\underbrace{\lambda_1 u_1+\dots+\lambda_k u_k}_{u}+\underbrace{\mu_1 v_1+\dots+\mu_m v_m}_{v}+\underbrace{\eta_1 w_1+\dots+\eta_m w_m}_{w}=0$$

$u+v+w=0 \Rightarrow w=-u-v$. Ma $u \in V\cap W$, $v\in \bar V \Rightarrow u-v\in \bar V$

Ma $w \in W$, e allora

Nota che $w \in \bar V \cap W$ e quindi $\exists\, \varepsilon_i$ $\quad w=\varepsilon_1 u_1+\dots$
$\dots+\varepsilon_k u_k$. Abbiamo quindi che:

$w=\eta_1 w_1+\dots+\eta_m w_m=\varepsilon_1 u_1+\dots+\varepsilon_k u_k \Leftrightarrow \varepsilon_1 u_1+\dots+\varepsilon_k u_k$
$-\eta_1 w_1-\dots-\eta_m w_m=0$

Ma $\{u_1,\dots,u_k,w_1,\dots,w_m\}$ sono una base quindi

$\varepsilon_1=\dots=\varepsilon_k=\eta=\dots\ \eta_m=0$

Analogamente si dimostra che anche $\mu_1=\dots=\mu_m=0$

- $\underbrace{\dim(Col(A))}_{\text{RANGO}}=\dim(Col(A^t))$ Una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso rango

$A \xrightarrow[\text{mosse di gauss}]{} R^{\text{RIDOTTA}}$ Lo spazio delle righe di A coincide con lo spazio delle righe della ridotta R.

Ricordare però che gli spazi colonna sono diversi!

$Col(A) \neq Col(R)$

$Righe(A)=Righe(R)$

$\dim(righe(R)) = \#\,pivots = rango = \dim(Col(A))$

$\| =$

$\dim(Col(A^t))$

N.B. Le righe di R dove ci sono pivots formano una base dello spazio delle righe.

Ricapitolando:

$$\text{Righe}(A) = \text{Col}({}^tA)$$

(trasponendo le righe diventano colonne e viceversa)

D'altra parte $\text{Righe}(A) = \text{Righe}(R)$

(A e le sue ridotte R hanno lo stesso spazio delle righe perché le mosse di Gauss determinano solo combinazioni lineari delle righe)

Inoltre $\dim(\text{Righe}(R)) = r$ è il rango, cioè il numero dei pivot

(è facile vedere che le righe di R che contengono pivot formano una base. Del resto le righe senza pivot hanno solo zeri!)

Dunque:

$$\dim[\text{Col}({}^tA)] = \dim(\text{Righe}(A)) =$$
$$= \dim(\text{Righe}(R)) = r = \dim(\text{Col}(A)).$$