$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$ det$\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ è una base

oordinate di $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$ rispetto a $\mathcal{B}$?

$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \lambda_1 = ? \quad \lambda_2 = ?$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 = 3 \quad + \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$// \quad 2\lambda_2 = 4 \longrightarrow \lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$-1 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2\\-1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

Le coordinate sono un concetto relativo.

06/11/18

MATRICI

$$⊛ \quad \boxed{\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad + 2x_4 = b_1 \\ \qquad\qquad x_3 + 4x_4 = b_2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = b_3 \end{cases}}$$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ A.L. associata al sistema

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \xmapsto{f} x_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

isolvere ⊛ equivale a trovare $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ t.c. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

issati b_1, b_2, b_3 ho la soluzione se b_1, b_2, b_3 stanno ell' immagine di f.

ATRICE associata all'A.L. f

$$\boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & b_2 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & b_3 \end{array}\right)} \longrightarrow$$ MATRICE COMPLETA ASSOCIATA AL SISTEMA ⊛

3X4

HE COLONNE — = N° DI VARIABILI

L = N° DI EQUAZIONI

Le matrici di A.L. da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ sono associate a $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \text{combinazione lineare delle colonne}$$

$$\downarrow$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{V} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

prodotto come combinazione lineare

$$\underline{\underline{A \cdot \vec{V}}} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 19 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- calcolare il valore dell'A.L. o il prodotto della matrice è la stessa cosa.

MODO ALTERNATIVO PER CALCOLARE $\vec{A} \cdot \vec{V}$ → prodotti scalari

$$\underline{\underline{A \cdot \vec{V}}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \underset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} (1)\cdot(-2) + 3(1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \\ 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 19 \end{pmatrix}$$

criterio di fare
"righe per colonne"

$$\underset{n \times m}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \overset{\text{NOTAZIONE}}{=} \left(a_{ij} \right)_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m}}$$

$$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

combinazioni lineari delle colonne

$$(a_{i,j})\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix}a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix} =$$

equivalenti

$$= \begin{pmatrix}x_1a_{11}+x_2a_{12}\overset{\dots+}{+}x_ma_{1m}\\ x_1a_{21}+x_2a_{22}+\dots+x_ma_{2m}\\ x_1a_{n1}+x_2a_{n2}+\dots+x_ma_{nm}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{m} x_j\cdot a_{1j}\\ \sum_{j=1}^{m} x_j\cdot a_{2j}\\ \sum_{j=1}^{m} x_j\cdot a_{nj}\end{pmatrix}$$

righe per colonne

$$a_{i,j})\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\dots+a_{1m}\cdot x_m\\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\dots+a_{2m}\cdot x_m\\ a_{n1}\cdot x_1+a_{n2}\cdot x_2+\dots a_{nm}\cdot x_m\end{pmatrix}$$

alcolare un'A.L. in un certo vettore $\vec{V}$ corrisponde
l prodotto $\vec{A}\cdot\vec{V}$.

PLICO IL METODO DI GAUS:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&0&2&b_1\\ 0&0&1&4&b_2\\ 1&3&1&6&b_3\end{array}\right) \xrightarrow{III-I} \left(\begin{array}{cccc|c}1&3&0&2&b_1\\ 0&0&1&4&b_2\\ 0&0&1&4&b_3-b_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{cccc|c}1&3&0&2&b_1\\ 0&0&1&4&b_2\\ 0&0&0&0&b_3-b_1-b_2\end{array}\right)$$

procedura a scalini terminata → matrice in "forma a scalini"

onde
imé

$$\begin{cases}x_1+3x_2 \quad +2x_4 = b_1\\ \qquad x_3+4x_4 = b_2\\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = b_3-b_1-b_2\end{cases}$$

- se $b_3-b_1-b_2 \neq 0$, cioè se $b_3 \neq b_1+b_2$, allora il sistema ✪ non ha soluzioni

[illegible] "riscritto" $0=0$ ⇒ questa eq. è inutile

se $b_3 = b_1+b_2$

↓

devo risolvere $\begin{cases}x_1+3x_2+2x_4=b_1\\ x_3+4x_4=b_2\end{cases}$

2 equazioni, 4 incognite ⇒ le soluzioni sono infinite

$\overset{\parallel}{4}$ variabili

$x_3 + 4x_4 = \boxed{b_2}$ → numero

$\Longrightarrow x_3 = b_2 - 4\underbrace{\boxed{x_4}}_{\text{indipendente}}$ (⇒ stabilisco x_4)

$x_1 + 3x_2 + 2x_4 = b_1 \iff x_1 + 3x_2 = b_1 - 2x_4$

$x_1 = -3x_2 - 2x_4 + b_1$

$$\boxed{b_3 = b_1 + b_2}$$

"FANNO CIO' CHE VOGLIONO"

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 2x_4 + b_1 \\ \boxed{x_2} = s \\ x_3 = -4x_4 + b_2 \\ \boxed{x_4} = t \end{cases}$$

⇓

x_2 e x_4 sono <u>variabili libere</u> ⇒ (infinito)^2 di sol.

SOLUZIONI

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -3s-2t+b_1 \\ s \\ -4t + b_2 \\ t \end{pmatrix} \middle| \; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v_1}} + t\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v_2}} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \middle| \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Le soluzioni sono lo Span + $\begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}$ → <u>soluzioni speciali</u>

$\vec{b}$ → e' la <u>soluzione particolare</u>

- esempio: riferito a ✪ (ho scelto un b_1 e un b_2)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = -3 \\ x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

con $s = 2$, $t = 3$

$$= \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $\vec{V_1}, \vec{V_2}$
- $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sostituendola a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ trovo una soluzione una soluzione particolare.

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \quad +2x_4=0 \\ \quad x_3+4x_4=0 \\ x_1+3x_2+x_3+6x_4=0 \end{cases} \rightarrow \text{sistema omogeneo associato.}$$

e soluzioni speciali $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ sono soluzioni del sistema mogeneo associato

L = TUTTE LE VARIABILI HANNO LO STESSO GRADO

⟵ RICORDA!

sercizio:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=b_1 \\ x_1+2x_2+4x_3+x_4=b_2 \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4=b_3 \\ -x_1+2x_2+(k-4)x_3+2x_4=b_4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & b_2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & b_3 \\ -1 & 2 & k-4 & 2 & b_4 \end{array}\right) —$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{sso di} \\ \text{aus)}}]{\substack{-I \\ -2I \\ +I}} \left(\begin{array}{cccc|c} \overset{=\text{PIVOT}}{①} & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & b_3-2b_1 \\ 0 & -1 & k-2 & 3 & b_4+b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{IV+II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & b_3-2b_1 \\ 0 & 0 & k & 3 & b_4+b_2 \end{array}\right) —$$

$$\xrightarrow{+\frac{k}{3}III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & b_3-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3+\frac{k}{3} & b_4+b_2+\frac{k}{3}(b_3-2b_1) \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=b_1 \\ x_2+2x_3=b_2-b_1 \\ -3x_3+x_4=b_3-2b_1 \\ \left(3+\frac{k}{3}\right)x_4=b_4+b_2+\frac{k}{3}(b_3-2b_1) \end{cases}$$

- se $3+\frac{k}{3}\neq 0$, cioè se $k\neq -9$ allora il sistema ha ed <u>unica</u> soluzione

• se $K = -9$ l' ultima eq. è la seguente :

$$0 = b_4+b_2-3(b_3-2b_1) = 6b_1+b_2-3b_3+b_4$$

$0 =$ un numero $\neq 0$

se $6b_1+b_2-3b_3+b_4 \neq 0$ il sistema <u>non</u> ha soluzione

se $6b_1+b_2-3b_3+b_4 = 0 \longrightarrow 0=0$ (ultima eq.)

$\downarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = b_1 \\ x_2 + 2x_3 = b_2 - b_1 \\ -3x_3 + x_4 = b_3 - 2b_1 \end{cases} \longrightarrow$$ più variabili che equazioni

$\downarrow$

DI SOLITO CI SONO SOLUZIONI INFINITE

$x_3 =$ variabile libera

$\downarrow$

$$x_4 = 3x_3 + b_3 - 2b_1$$

$$x_2 = -2x_3 + b_2 - b_1$$

$$x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4 + b_1 = \cancel{2x_3} - b_2 + b_1 \cancel{-2x_3} - 3x_3 - b_3 + 2b_1 + b_1 =$$

$$= -3x_3 + 4b_1 - b_2 - b_3$$

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 4b_1 - b_2 - b_3 \\ x_2 = -2x_3 + b_2 - b_1 \\ \boxed{x_3} = x_3 \\ x_4 = 3x_3 + b_3 - 2b_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_1 - b_2 - b_3 \\ b_2 - b_1 \\ 0 \\ b_3 - 2b_1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = s$$

$$\mathcal{S} = \left\{ s\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4b_1 - b_2 - b_3 \\ b_2 - b_1 \\ 0 \\ b_3 - 2b_1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$\longrightarrow$

- caso particolare: - scelgo b_1, b_2, b_3, b_4

$= -9$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+4x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4=3 \\ -x_1-2x_2-13x_3+2x_4=1 \end{cases}$$

$6b_1+b_2-3b_3+b_4=0$

= SOLUZIONE PARTICOLARE

$$S=\left\{ s\cdot\boxed{\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\\3\end{pmatrix}}+\boxed{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\+1\end{pmatrix}} \;\middle|\; s\in\mathbb{R}\right\}$$

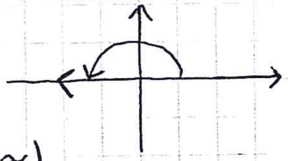
con $s=2$ $\quad S=\left\{\begin{pmatrix}6\\4\\-2\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}5\\5\\-2\\-5\end{pmatrix}$ → UNA DELLE INFINITE SOLUZIONI DEL SISTEMA

SOLUZIONE SPECIALE DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

* * *

sercizio:

$z^3+2|z|^2=0 \qquad z^3=\overbrace{-2|z|^2}^{\text{NUMERO REALE NEGATIVO}}$



$z \rightsquigarrow (\rho,\theta) \qquad (\rho^3, 3\theta) \qquad (2\rho^2, \pi)$

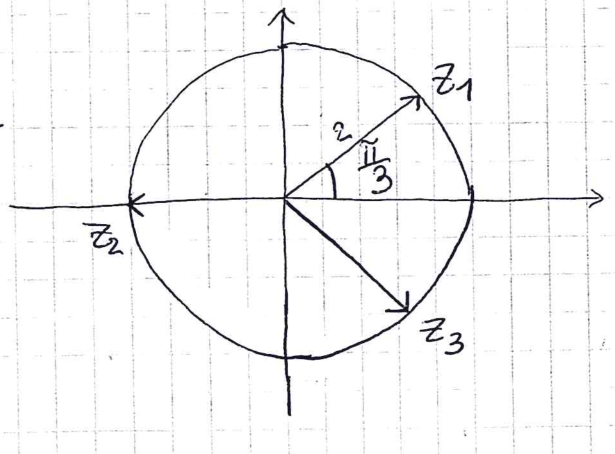
$|z|=\rho$

$$\begin{cases} \rho^3=2\rho^2 \rightarrow \rho^3-2\rho^2=0 \quad \rho^2(\rho-2)=0 \\ 3\theta=\pi+2k\pi \rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi \quad \rho=2 \vee \rho=0 \end{cases}$$

$\rho=0 \Rightarrow z=0$ e' soluzione

$\rho=2$

$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$



$z_2=$

$z_3=$

PRODOTTO DI MATRICI

08/11/18.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

• DA MATRICE AD A.L.

2 X 3 $\quad\downarrow$ 3 vettori di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xmapsto{f_A} x_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+2+5 \\ +2+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot -2 + 2\cdot 1 + 1\cdot 5 \\ -1\cdot -2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f_A(e_1) = f_A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f_A(e_2) = f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_A(e_3) = f_A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- conclusione (generale)

• DA A.L. A MATRICE

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ A.L.

La matrice associata $n \times m$ e' $A = \underbrace{\left(f(e_1) \,\Big|\, f(e_2) \,\Big|\quad \Big|\, f(e_m) \right)^{n\ \text{righe}}}_{m\ \text{colonne}}$

- esempio:

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ A.L.

• supponiamo di conoscere i valori di f sui vettori della base canonica, allora posso calcolare f su tutti i vettori. In altre parole: "Un' A.L. e' univocamente determinata dai suoi valori sui vettori della base canonica"

$\swarrow$ colonne

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = f(x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3) =$$
$$= f(x_1 \cdot e_1) + f(x_2 e_2) + f(x_3 e_3) =$$
$$= x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_3) =$$
$$= x_1\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$\downarrow$ per le proprietà di A.L.

$B = \begin{pmatrix}-4 & 3\\1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad f_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

3X2

$f_B(e_1) = \begin{pmatrix}-4\\1\\0\end{pmatrix} = f_B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$f_B(e_2) = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} = f_B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

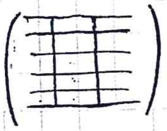
PRODOTTO DI MATRICI

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ A.L. $\rightsquigarrow A_{n \times m} \rightsquigarrow$ n equazioni, m incognite

$m < n \Rightarrow f$ NON è SURIETTIVA

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ AL $\to$ può essere iniettiva ma <u>non</u> suriettiva

$f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ $\quad$ 5X3 $\quad$ A=



$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ = b_1 \\ \_\_\_\_\_\_ = b_2 \\ \_\_\_\_\_\_ = b_3 \\ \_\_\_\_\_\_ = b_4 \\ \_\_\_\_\_\_ = b_5 \end{cases}$$

5 equazioni 3 incognite $\to$ NO SOL.

Dire che f è suriettiva vuol dire che il sistema ha sempre soluzione.

Dire che f non è suriettiva vuol dire che il sistema <u>NON</u> ha sempre soluzione (per ogni scelta dei termini noti).

PIU' EQUAZIONI CHE INCOGNITE ⇒ non sempre risolubile

- $m > n$

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ A.L. ⇒ f NON iniettiva

$f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ A.L.

$f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4\}$ ⇒ f <u>NON</u> è iniettiva

$A_{n \times m} \rightsquigarrow$ n equazioni, m incognite

ricorda →

> f. suriettiva → sist. ha sempre almeno 1 sol. comunque scelgo i t.n.

MENO EQUAZIONI CHE INCOGNITE

⇓

non sempre la sol. è unica

||

ce n'è al massimo una

- $m = n$ → sistemi quadrati

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ A.L.

$f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ → PUO' ESSERE SIA INIETTIVA CHE SURIETTIVA

↙

è possibile che f sia biunivoca

↙

è possibile che il sistema ha ed unica, esattamente una soluzione, comunque scelgo i t.n.

- esempio: $n = m = 2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ BIUNIVOCA ⇔ $\det A \neq 0$

↕ ↕ ↖ SISTEMA (ha sempre

PRODOTTO DI MATRICI

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

= vettore = sorte di matrice 3x1

$A_{2\times3}$

$$A_{n\times m} \cdot \underset{\wedge}{\vec{x}} \iff \vec{x} \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 & \vec{b}_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \left(A\cdot\vec{b}_1 \middle| A\cdot\vec{b}_2 \middle| A\cdot\vec{b}_3 \middle| A\cdot\vec{b}_4 \right)_{2\times4}$$

$A_{2\times3}$ $B_{3\times4}$

l n° delle colonne di A deve essere = al n° delle righe di B per ter calcolare il prodotto A·B; se $A_{n\times \underline{m}}$ e $B_{\underline{m}\times k}$, il rodotto A·B sarà una matrice $C_{n\times k}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 2+9+8=19 & 14 & -5 & 2 \\ 1-18-4=-21 & -5 & \boxed{42} & 1 \end{array} \right)$$

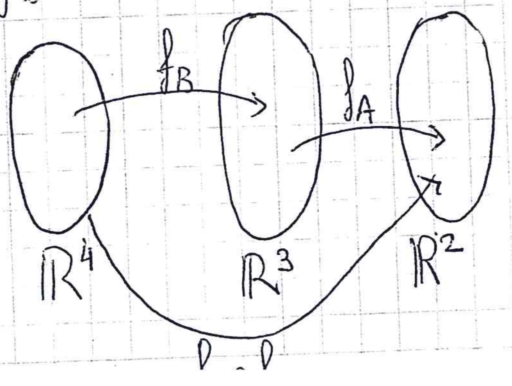
A B A·B 2ª riga 3ª colonna

ho usato il metodo riga x colonna

prodotto di matrici = "righe per colonne"

$A \rightsquigarrow f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$B \rightsquigarrow f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$



$g = f_A \circ f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$C_{2\times 4} = A\cdot B$

↓

matrice di g

NON E' COMMUTATIVO

Fare il prodotto di matrici $\overset{A\cdot B}{}$ equivale a fare la composizione di funzioni $f_A \circ f_B$ (prima B e poi A).

In questo caso B·A non esiste perché n° colonne di B ≠ n° righe di A.

IN BASE 3 → $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$A = \left[f_A(e_1) \,\vdots\, f_A(e_2) \,\vdots\, f_A(e_3) \right]$$

IN BASE 4 → $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$f_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$A\cdot B = A \cdot \left[f_B(e_1^{(4)}) \,\vdots\, f_B(e_2) \,\vdots\, f_B(e_3) \,\vdots\, f_B(e_4) \right] =$$

$$= \left[\boxed{\underbrace{A\cdot f_B(e_1)}} \,\middle|\, A\cdot f_B(e_2) \,\middle|\, A\cdot f_B(e_3) \,\middle|\, A\, f_B(e_4) \right] \longrightarrow = \boxed{f_A(f_B(e_1^{(4)}))}$$

$$=$$

$$f_A \circ f_B \rightsquigarrow C = \left[\boxed{(f_A \circ f_B)(e_1^{(4)})} \,\middle|\, (f_A \circ f_B)(e_2) \,\middle|\, (f_A \circ f_B)(e_3) \,\middle|\, (f_A \circ f_B)(e_4) \right]$$

↓

$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$\boxed{A\cdot \vec{v} = f_A(\vec{v})}$$

$$A\cdot B \overset{?}{=} f_A \circ f_B$$

$A\cdot \vec{x} = \vec{b}$ ⟶ FORMA DI UN SISTEMA

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \overset{=}{\longleftrightarrow} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = b_1 \\ 6x_1 \quad + 2x_3 = b_2 \end{cases}$$

Se trovassi una matrice B "inversa destra" di A,

oe' t. c. $A\cdot B = I$ (matrice identità)

$$f_A \circ f_B = id$$

se prendo $\vec{x} \overset{def}{\equiv} B\cdot\vec{b}$ ho trovato la soluzione, infatti

$$\underbrace{A\cdot\vec{x}} = A\cdot(B\cdot\vec{b}) = (A\cdot B)\cdot\vec{b} = I\cdot\vec{b} = \underbrace{\vec{b}}$$

sercizio ← RICORDA

rovare (se esiste) un'inversa sinistra di $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$_{3x2}$

3 inversa sinistra

↓

2 tutti 0 nella

2 colonna

$$\begin{matrix} B : & A & = & I \\ \downarrow & \downarrow & & \text{identità} \\ ?\times 3 & 3\times 2 & & ?\cdot 2 \end{matrix}$$

SICCOME E' UN'IDENTITA' "?" = 2

B= ?

✳

PARENTESI SULLE MATRICI IDENTITA'...

I= matrici quadrate

$id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$id: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

=↓

A.L.

$id: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$I_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \uparrow & \uparrow \\ f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La matrice identità ha gli "1" sulla diagonale.

$$\underset{A_{2x3}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \overset{I_{3x3}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underset{2x3}{\begin{pmatrix} \textcircled{2} & \textcircled{-1} & \textcircled{5} \\ \textcircled{6} & \textcircled{0} & \textcircled{2} \end{pmatrix}}$$

= 1ª RIGA X 1ª COLONNA

$$\underbrace{\underset{3X3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2X3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}_{\neq}$$

NON SI PUO' FARE

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2x2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{2X3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{2\times3}{B}\cdot\underset{3\times2}{A}=\underset{2\times2}{I}$$

4 VARIABILI — 4 EQUAZIONI

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a\cdot1+3\cdot0+b\cdot0=1 \\ a\cdot3+0\cdot0+b\cdot-2=0 \\ c\cdot1+0\cdot3+d\cdot0=0 \\ c\cdot3+0\cdot0+d\cdot-2=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 3a-2b=0 \rightarrow b=\frac{3}{2} \\ c=0 \\ 3c-2d=1 \rightarrow d=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$1\cdot1+0\cdot3+\frac{3}{2}\cdot0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ SI

Trovare (se esiste) un'inversa destra di $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}_{3\times2}$

$$\underset{3\times2}{A}\cdot\underset{2\times?}{B}=\underset{3\ ?}{I} \longrightarrow ?=3 \Rightarrow B_{2\times3}$$

$f_A:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ può essere iniet. ma non suriet.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 VARIABILI — 9 EQUAZIONI

verifica che è impossibile

$$\begin{cases} a+3d=1 \\ b+3c=0 \\ c+3f=0 \\ 3a=0 \\ 3b=0 \\ 3c=0 \\ -2d=0 \\ -2e=0 \\ -2f=0 \end{cases}$$

12/11/18

$$\underset{3\times3}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

invertibile a destra ?

TODO GAUSS-JORDAN per il calcolo della matrice inversa.

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ 3\times6 \end{array} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{II}-\mathrm{I},\ \mathrm{III}-2\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(under the first matrix: $\underbrace{\quad}_{A}$, $\underbrace{\quad}_{I}$)

SE A QUESTO PUNTO NON MI TROVO IN QUESTA SITUAZIONE, ALLORA NON E' INVERTIBILE.

$$\xrightarrow[\ e\ \mathrm{III}]{mbio} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}+\frac{1}{2}\mathrm{III}]{\mathrm{II}-\frac{3}{2}\mathrm{III}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{t\frac{1}{3}\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & +1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}\cdot-\frac{1}{2}]{\mathrm{II}\cdot-\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

↓ matrice diagonale

↓ trasformazione della matrice diagonale in matrice identità

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B = I \\ B\cdot A = I \end{array}\right\}$$ solo se A è quadrata

→ vedi bene prodotto

$$B\cdot A = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\cdot B$$

$$A \rightsquigarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=b_1 \\ x_1+x_2-x_3=b_2 \\ 2x_1-x_2-x_3=b_3 \end{cases} \qquad A\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

= matrice inverse

Se prendo $\vec{x} = B\cdot\vec{b}$

allora $A\cdot\vec{x} = A\cdot B\cdot\vec{b} = I\cdot\vec{b} = \vec{b}$, quindi $\vec{x} = B\cdot\vec{b}$ e' soluzione.

_ esempio

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+x_2-x_3=-2 \\ 2x_1-x_2-x_3=1 \end{cases} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3\cdot 6+(0\cdot 2)+\frac{1}{3}\cdot 1 \\ 1/6\cdot 6+(1/2\cdot 2)+(-1/3\cdot 1) \\ 1/2\cdot 6+(-1/2\cdot 2)+(0\cdot 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ -1/3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x_1=\frac{7}{3}$ $\quad x_2=-\frac{1}{3}$ $\quad x_3=4$ → <u>soluzioni del sistema</u>

Se una matrice non e' quadrata non c'e' l'inversa.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 1/3 \\ x_2 = 1/6 \\ x_3 = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi la prima colonna di B e' la soluzione del sistema dove come termini noti ho preso $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

. . . . seconda . . . . ho preso $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

. . . . terza . . . . ho preso $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

capisci questo modo di fare il prodotto

$$A \cdot B = \left[A \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \middle| A \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I^a colonna di B

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} \xmapsto{f_A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{f_B} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} \xmapsto{f_A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

MATRICE · VETTORE $1/3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0 = 1/3$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/2 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$\longmapsto$

Esercizi

$$\circledast \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = b_2 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = b_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = b_4 \\ x_4 + x_5 + x_6 = b_5 \end{cases}$$

eq. 6 incognite

salto una colonna $\Rightarrow x_2 =$ variabile libera

$$\left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \end{array} \begin{array}{c} \vdots\, b_1 \\ \vdots\, b_2 \\ \vdots\, b_3 \\ \vdots\, b_4 \\ \vdots\, b_5 \\ \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV} - \text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \begin{pmatrix} \overset{\text{PIVOT}}{\textcircled{1}} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & \overset{\text{PIVOT}}{\textcircled{1}} & 5 & 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_4 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_5 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

5X6

A_{5X6} $f_A : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5 \to f_A$ NON PUO' ESSERE INIETTIVA

$\Downarrow$

ci sono alcuni termini noti "colpiti" più volte, potrebbe essere suriettiva.

$$\xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & b_3-b_2+2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_4-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \text{ e } V]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_4-b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & b_3-b_2+2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[V+4III]{IV-III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_1-b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & b_3-b_2+2b_1+4b_5 \end{pmatrix}$$

scambio
V con IV

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & b_3-b_2+2b_1+4b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-b_1-b_5 \end{array}\right)$$

$\underbrace{x_2 \qquad\qquad x_6}$ → variabili libere (2 gradi di libertà per scrivere le sol.)

Il sistema ha sol. $\iff b_4-b_1-b_5=0$ cioè se $\boxed{b_4=b_1+b_5}$

– prendo particolari termini noti

$b_1=1$

$b_2=2$

$b_3=0$

$b_4=-3$

$b_5=-4$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4 = 1 \\ x_3+5x_4 = 0 \\ x_4+x_5+x_6=-4 \\ 5x_5+5x_6=16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 5x_5=-5x_6-16 \rightarrow x_5=-x_6-\frac{16}{5}$$

$$x_4=-x_5-x_6-4=\cancel{x_6}+\frac{16}{5}\cancel{-x_6}-4=-\frac{4}{5}$$

$$x_3=-5x_4=\cancel{-8}-\frac{4}{\cancel{5}}=4$$

$$x_1=-2x_2-x_3-x_4+1=-2x_2-4+\frac{4}{5}+1=-2x_2+\frac{(-20+4+5)}{5}=$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - \frac{11}{5} \\ \enclose{circle}{x_2} = s \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -\frac{4}{5} \\ x_5 = -x_6 - \frac{16}{5} \\ \enclose{circle}{x_6} = t \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11/5 \\ 0 \\ 4 \\ -4/5 \\ -16/5 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

sol. speciali del sistema omogeneo associato

sol. particolare del sistema completo