$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - \frac{11}{5} \\ x_2 = s \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -\frac{4}{5} \\ x_5 = -x_6 - \frac{16}{5} \\ x_6 = t \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11/5 \\ 0 \\ 4 \\ -4/5 \\ -16/5 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

sol. speciali del sistema omogeneo associato

sol. particolare del sistema completo

MATRICI "MOSSE DI GAUSS"

$\boxed{13/11/18}$

TROVA LE SOLUZIONI

$$\begin{cases} x+z+w=7 \\ w=4 \\ 2x+y+3z+w=9 \\ -x+y-w=-8 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -8 \end{array}\right)}_{B} \xrightarrow[IV+I]{III-2I} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(A = the first four columns)

abbiamo preso la matrice A e ho fatto 2 operazioni di Gauss (le mosse di Gauss corrispondono a una ben precisa matrice 4x4 → poiché A ha 4 righe).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

E = matrice "mossa di Gauss" vuota

↓

io voglio E_1^* = matrice "mosse di Gauss" III-2I

$$-21$$
$$= (-2\cdot 1)+0\cdot 0+(1\cdot 2)+(0\cdot -1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

$$E_1^*$$

$$\text{IV} + \text{I} \quad \underset{E_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{\text{SCAMBIO II CON III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}]{\text{IV} - \text{II}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}]{\text{IV} - \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Z \rightarrow$ variabile libera

$$\begin{cases} X + Z + W = 7 \\ Y + Z - W = -5 \\ W = 4 \\ Z = Z \end{cases} \qquad \begin{aligned} X &= -Z - W + 7 = -Z + 3 \\ Y &= -Z + W - 5 = -Z - 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; Z \in \mathbb{R} \right\}$$

sol. speciale sol. particolare

è sol. del sistema con i termini noti nulli

Riassunto: $E_1 \cdot B$

$E_2 \cdot E_1 \cdot B$

$E_3 \cdot E_2 E_1 B$

$E_4 E_3 E_2 E_1 B$

$$\underbrace{E_5 \cdot E_4 E_3 E_2 E_1}_{\text{matrici "mosse di Gauss"}} B = \underset{\text{MATRICE RIDOTTA}}{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ho una matrice $A_{n \times m}$ dove $n > m$ allora non ha inversa destra. $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ NON PUO' ESSERE SURIETTIVA

$\Updownarrow$

NON ESISTE L'INVERSA DESTRA

$$\underset{3 \times 2}{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

eq., 2 incognite

$$\begin{cases} -x + y = b_1 \\ 2x + y = b_2 \\ -2x + 3y = b_3 \end{cases}$$

f_A NON SURIETTIVA

$\downarrow$

significa che il sistema non ha sempre sol.

Ogni sistema lineare che ha più eq. che incognite NON è sempre risolubile, cioè esistono dei termini noti per i quali il sistema è impossibile.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\frac{1}{3}\text{II}} \underset{R}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

riducendo una matrice $A_{n \times m}$ dove $n > m$ si ottiene sempre una matrice dove ALMENO l'ultima riga contiene solo 0.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{R} = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\underset{3\times3}{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times3}{E_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\times3}{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$II + 2I$ $\qquad$ $III - 2I$ $\qquad$ $III - \frac{1}{3} II$

Se $E = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1$ abbiamo che $R = E \cdot A$

Una matrice A che ha una riga di zeri <u>non</u> ha inversa destra

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}}^{A}_{3\times2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}_{\substack{B \\ 2\times3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \to 0$ (sarebbe 0 anche qui)

Se moltiplico A a destra per una qualunque matrice B, ottengo una matrice che ha ancora una riga di zeri, quindi non troverò mai I.

Se la matrice A ha la i-esima riga tutta di zeri, allora in ogni prodotto A·B la i-esima riga è ancora tutta di zeri. Quindi A non ha inversa destra.

N.B. Una matrice che ha una riga di zeri "può" avere inversa sinistra.

$$\underset{2\times3}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times2}{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a = 1 \to a = -1 \\ a + 3b = 0 \to b = \frac{1}{3} \\ -d = 0 \to d = 0 \\ d + 3e = 1 \to e = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \star \\ 0 & \frac{1}{3} & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se A ha una colonna di zeri, A non ha inversa
nistra, ma ha inversa destra.

2 matrice di una mossa di Gauss ha inversa? si.

2 le matrici quadrate inversa dx = inversa sx.

$$\boxed{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $II + 2I$ $\qquad$ $\downarrow$ $II - 2I$

$$E_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

scambio II e III

esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 \cdot F_1 = F_1 \cdot E_1 = I$$

sempio

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 F_2 = F_2 E_2 = I$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 F_3 = F_3 \cdot E_3 = I$$

La matrice ridotta $R = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$ ha una riga di zeri, quindi non ha inversa destra.
Verifichiamo che neanche A può avere inversa destra.
se per assurdo esistesse B tale che $A \cdot B = I$, allora avrei che $\underbrace{R}_{} \cdot B \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = \underbrace{E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A}_{} \cdot B \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 =$

Il prodotto delle matrici è associativo
$$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$= E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot (I \cdot F_1) \cdot F_2 \cdot F_3 = E_3 E_2 E_1 (F_1) F_2 F_3 = E_3 E_2 I F_2 F_3 =$$

$$= E_3 (E_2 F_2) F_3 = E_3 (I F_3) = E_3 F_3 = I$$ e R avrebbe un'inversa destra $\Rightarrow$ l'assurdo sta nel supporre che A abbia inversa destra.

$F_1 = E_1^{-1}$
$F_2 = E_2^{-1}$
$F_3 = E_3^{-1}$

L'inversa di una matrice quadrata A (se esiste) si denota A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

esercizio: Se A e B sono matrici $n \times n$ ed hanno entrambe un'inversa, allora anche il prodotto $A \cdot B$ ha un'inversa.
Devo trovare una matrice C tale che $C \cdot (AB) = (AB) C = I$

$$B^{-1} (A^{-1} \cdot A) B = B^{-1} I B = B^{-1} B = I$$

$$A (B \cdot B^{-1}) A^{-1} = A I A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

Conclusione $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

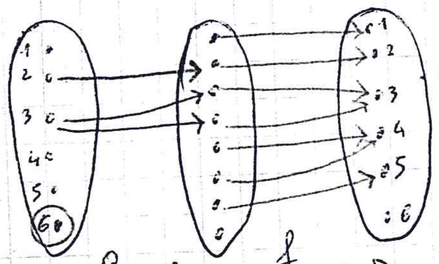
Il prodotto delle inverse scambiate è uguale all'inverso del prodotto.

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$$

esercizio:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – metodo Gauss-Jordan per il calcolo di E_1^{-1}

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_1} \;\vdots\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right) \xrightarrow{II - 2I} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \;\vdots\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_1^{-1}}\right)$$



Quando f ha un'inversa destra?

$B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B$

$g: B \to A$ inversa destra di f se $f \circ g : B \to B$ è la funzione identità

→ FARE UNA O L'ALTRA È INDIFFERENTE

se f non è suriettiva non ha inversa destra.

$\boxed{\text{TEOREMA 1}}$: $f: A \to B$ ha un'inversa destra

$$\Updownarrow$$

f è suriettiva

DIM $\Downarrow$ Devo dimostrare che se $f: A \to B$ ha inversa destra, allora f è suriettiva.

"$P \Rightarrow Q$" equivale a "$\neg Q \Rightarrow \neg P$"

Questo equivale a "se f non è suriettiva, allora f non ha inversa destra".

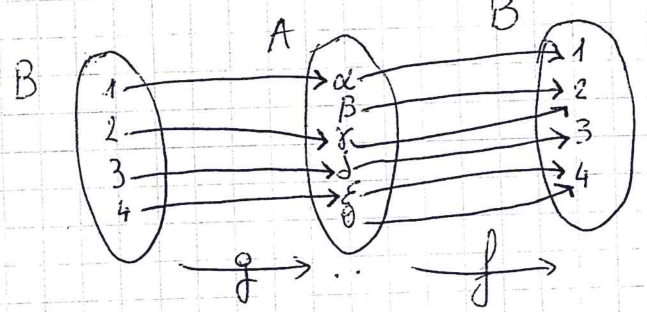
Per ipotesi posso prendere $b \notin \operatorname{Im} f$

Qualunque funzione $g: B \to A$ prenda, abbiamo che

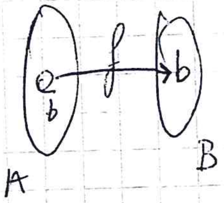
$b \xmapsto{g} \underset{\substack{\cap \\ A}}{g(b)} \xmapsto{f} * \neq b$ cioè $f(g(b)) \neq b$ perché $b \notin \mathrm{Im} f$

quindi $f \circ g \neq id$

DIM. $\Uparrow$ Devo dimostrare che se f è suriettiva, allora f ha un'inversa destra.



$f: A \to B$ Per ogni $b \in B$ prendo un elemento $a_b \in A$ tale che $f(a_b) = b$. Questo è possibile perché f è suriettiva



Definisco $g: B \to A$ ponendo $b \xmapsto{g} a_b$

Allora $\forall b \in B$ $f(g(b)) = f(a_b) = b$

Quindi $f \circ g$ è l'identità e g è inversa dx di f.

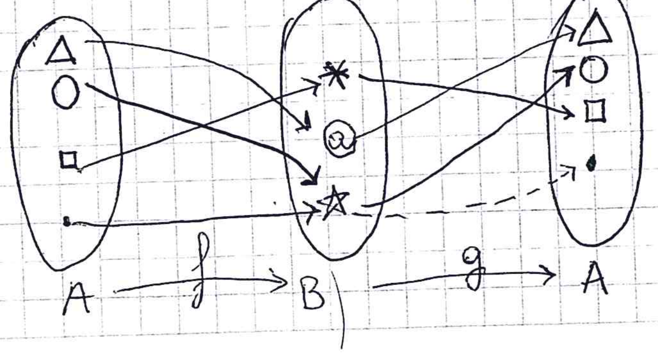
[C.V.D.]

TEOREMA 2 : $f: A \to B$ è iniettiva

$\Updownarrow$

f ha un'inversa sinistra

f non è iniettiva →



- - - - → non posso tracciarla, sennò g non è più una funzione.

⇒ f non ha inversa sinistra.

$g: A \to B$ inversa sinistra significa che $g \circ f = id$.

15/11/18

SOTTOSPAZI

1 : Un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ della forma $W = Span\{v_1, \dots, v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$

esempio: L'immagine $Im(f)$ di una A.L. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

tanto $Im f \subseteq \mathbb{R}^n$, adesso verifichiamo che $Im f$ è lo $(=)$

$Im f = Span\{f(e_1), \dots, f(e_m)\}$

$A = B$
$A \subseteq B$ & $B \subseteq A$

RICORDA

$\mathbb{R}^3 = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

DIM. $\supseteq$

Prendo $w \in Span\{f(e_1), \dots f(e_m)\}$, voglio dimostrare che $w \in Im f$

Esistono dei numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ t.c. $w = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_m f(e_m)$

Voglio dimostrare che $w \in Im f$, cioè $\exists v \in \mathbb{R}^m$ t.c. $f(v) = w$.

Se prendo $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m \in \mathbb{R}^m$, allora

$f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_m e_m) =$ (per le proprietà delle A.L.)

$= f(\lambda_1 e_1) + \dots + f(\lambda_m e_m) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_m f(e_m) = w$

DIM. $\subseteq$

Prendo $w \in Im f$, devo dimostrare che $w \in Span\{f(e_1), \dots, f(e_m)\}$.

Esiste un $v \in \mathbb{R}^m$ t.c. $w = f(v)$; $\vec{v} \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_m\end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m$

$w = f(v) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m) \overset{f \text{ è A.L.}}{=} \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_m f(e_m) \in Span\{f(e_1), \dots, f(e_m)\}$.

[C.V.D.]

Il nucleo di una A.L. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é

$$\operatorname{Ker} f = \{ v \in \mathbb{R}^m \mid f(v) = 0 \}$$

RICORDA

- Kerf Esistono sempre vettori v t.c. $f(v)=0$? Si, tutte le A.L. f hanno la proprietà che $f(0)=0$

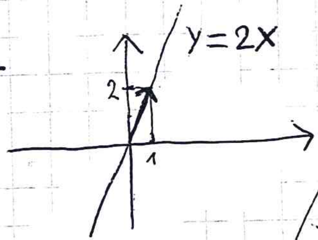
Quindi $0 \in \operatorname{Ker}(f)$
Il nucleo non può essere un insieme vuoto.

Il nucleo di una A.L. $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é un sottospazio di $\mathbb{R}^m$

anticipo: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\{\text{soluzioni speciali}\}$

$\{0\}$ é considerato un sottospazio (banale)

es.



$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 2x \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ é un sottospazio?
(Mi chiede se quei vettori sono lo Span di qualcosa).

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Downarrow$

Tutte le rette che passano per l'origine creano lo spazio $\mathbb{R}^2$.

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

ESERCIZIO:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ 2x + y + 3z \\ x - 3y + 5z \end{pmatrix}$$

1. Trovare base per f
2. " " " Im f
3. Trovare le soluzioni generali del sistema $\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

dove A è la matrice associata ad f.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{cases} x + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker} f_A = N(A) \xrightarrow[\text{alle}]{\text{corrispondono}}$ soluzioni del sistema omogeneo associato, il sistema dove tutti i termini noti sono 0.

NUCLEO $\qquad$ spazio nullo

$\{\vec{v} \mid f(\vec{v}) = 0\}$ $\qquad \{\vec{x} \mid A \cdot \vec{x} = 0\}$

vettori che vanno in 0

$\operatorname{Im} f$

$$\circledast \begin{cases} x + 2z = b_1 \\ 2x + y + 3z = b_2 \\ x - 3y + 5z = b_3 \end{cases}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \middle| \circledast \text{ ha soluzione} \right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 2 & 1 & 3 & b_2 \\ 1 & -3 & 5 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -3 & 3 & b_3 - b_1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{III} + 3\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 + 3b_2 - 6b_1 \end{array}\right)$$

z = variabile libera

$\circledast$ ha sol. $\iff 3b_2 + b_3 - 7b_1 = 0$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| b_3 + 3b_2 - 7b_1 = 0 \right\}$$

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\{ f(e_1), f(e_2), f(e_3) \}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$Im f = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right\} \rightarrow$$ per trovare l'immagine devo fare lo Span delle colonne della matrice.

Def:
Lo spazio delle colonne di una matrice A è
$C(A) = Span\{\text{colonne di } A\}$ → ci fa capire quando un sistema ha soluzione

L'Im f di una A.L. è uguale allo spazio delle colonne della matrice associata.

$$Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right\} \overset{\text{DA DIMOSTRARE}}{=} Span\{\text{colonne "pivot"}\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3+3b_2-7b_1 \\ \text{PIVOT} & \text{PIVOT} & \text{LIBERA} & \end{array}\right)$$

⇓

$$Span\{\text{colonne "pivot"}\} = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

Una base di Im f è $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ → DA GIUSTIFICARE
↓
immagine di dimensione 2, mi bastano 2 vettori.

$$\begin{cases} x+2z=b_1 \\ y-z=b_2-2b_1 \\ b_3+3b_2-7b_1=0 \end{cases} \qquad 0=0$$

ASSUMENDO

con $b_1=1$, $b_2=-2$, $b_3=13$
↓
$$\begin{cases} x+2z=1 \\ y-z=-4 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow x=-2z+1 \\ \rightarrow y=z-4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} \qquad S=\left\{z\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

sol. [illegible]

ANTICIPO: base $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

sol. speciali

esercizio RICORDA

$(z+i)^3 = -(\overline{z} - i)$ SUGGERIMENTO $\rightarrow \overline{z} - \underbrace{i}_{=\text{coniugato di } i} = \overline{z+i}$

$(z+i)^3 = -(\overline{z+i})$

$w = z+i$

$\overline{w} \cdot w^3 = -\overline{w} \cdot w$

$\overset{z}{(a+ib)}(a-ib) =$

$= a^2+b^2$

$\overline{w} \cdot w = |w|^2$

$w^4 = -|w|^2$

$w = (\rho, \theta)$

$w^4 = (\rho^4, 4\theta)$

$-|w|^2 = \rho^2 \rightsquigarrow (\rho^2, \pi)$

$$\begin{cases} \rho^4 = \rho^2 \rightarrow \rho^4 - \rho^2 = 0 \quad \rho^2(\rho^2-1) = 0 \\ 4\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$\rho = 0 \lor \rho = 1$!!!

$\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$\rho = 0 \Rightarrow w = 0$

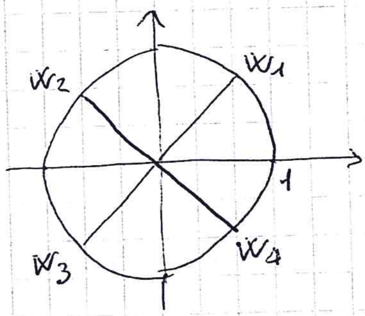
$\rho = 1$

$k=0 \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

$k=1 \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$

$k=2 \quad \theta = \frac{5}{4}\pi$

$k=3 \quad \theta = \frac{7}{4}\pi$



$w_3 = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_3 = w_3 - i = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)i$

RICORDA

$\overline{z+w} \overset{?}{=} \overline{z} + \overline{w}$

$z = a+ib \quad w = c+id$

$(a+c) + i(b+d) = z+w$

$\overline{z+w} = (a+c) - i(b+d)$

$\overline{z} = a - ib$

$\overline{w} = c - id$

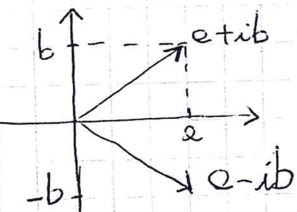
$\overline{z} + \overline{w} = (a+c) - i(b+d)$

VERO ✓

$\overline{z \cdot w} \overset{?}{=} \overline{z} \cdot \overline{w}$

$z \to (\rho, \theta)$

$\overline{z} \to (\rho, -\theta)$



$w = (\rho', \theta')$

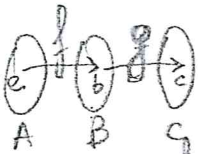
$\overline{w} = (\rho', -\theta')$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (\rho \cdot \rho', -\theta - \theta')$

$zw = (\rho\rho', +\theta + \theta')$

$\overline{zw} = (\rho\rho', -(\theta + \theta'))$

$g \circ f$



ESERCITAZIONE SCRITTA GEOMETRIA

19 Nov. 2018

Prendo un qualunque $c \in C$, visto che g è suriettiva, $\exists\, b \in B$ t.c. $g(b)=c$; visto che f è suriettiva, $\exists\, a \in A$ t.c. $f(a)=b$. Quindi $a \xrightarrow{g \circ f} c$. Posso concludere che $g \circ f$ è suriettiva.

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, determinare il valore di verità (V=vero o F=falso)

1) Se $f: A \to B$ non ha inversa sinistra, allora f non è iniettiva V (scrivi spiegazione)

2) Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ hanno entrambe inversa destra, allora la composizione $g \circ f$ ha inversa destra. V
suriettive = inversa destra

3) Se A e B sono matrici, allora $N(A \cdot B) \supseteq N(B)$ V

4) Se A e B sono matrici, allora $Col(A \cdot B) \supseteq Col(B)$

5) Tutte le applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ sono suriettive

6) Esistono applicazioni lineari iniettive $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$.

7) Il modulo di un numero complesso è uguale al modulo del suo coniugato.

8) $(\bar{z})^3 = \overline{(z^3)}$ per ogni numero complesso z

9) L'insieme $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+2y-1=0 \right\}$ è un sottospazio vettoriale

10) $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ESERCIZI

1) Col metodo di Gauss-Jordan, trovare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B) Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^5 + 8\bar{z} = 0$

c) Siano $z = 1+\sqrt{3}i$ e $w = \sqrt{3}+i$. Calcolare $\dfrac{z^{51}}{w^{50}}$

D) Trovare le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

E) Trovare l'insieme di tutte le soluzioni del sistema:

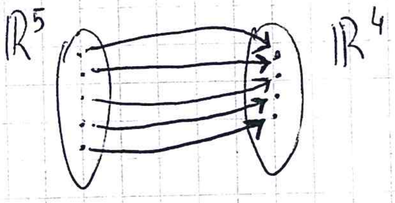
$$\begin{cases} 4x_1 \quad\quad - x_3 - 3x_4 = b_1 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = b_2 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 - 4x_4 = b_3 \end{cases}$$

al variare di b_1, b_2, b_3.

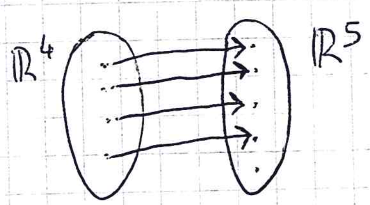
ESERCITAZIONE

$\boxed{19/11/18}$

5) $f_{AL} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ devono essere suriettive F



6) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ V



7) $|a+ib| \overset{?}{=} |a-ib|$ V

$a+ib = a+ \dots$

8) $(\overline{z})^3 \overset{?}{=} \overline{(z^3)} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

CORREZIONE

$\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z} \overset{?}{=} \overline{z \cdot z \cdot z}$

$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ SI

$z = a+ib \quad \overline{z} = a-ib \quad z = (\rho, \theta)$

$\rho = \sqrt{a^2+b^2} \quad \overline{\rho} = \sqrt{a^2+(-b)^2} \quad \overline{z} = (\rho, -\theta)$

$z = a+ib \quad \overline{z} = a-ib$

$(a-ib)^3 \overset{?}{=} \overline{(a+ib)^3}$

$\cancel{a^3} - (i^3 b^3) + 3a^2(-ib) + 3(-ib)^2 a \overset{?}{=} \cancel{a^3} + i^3 b^3 + 3a^2 ib + 3a(ib)^2$

$ib^3 - 3a^2 ib + 3b^2 a \overset{?}{=} i^3 b^3 + 3a^2 ib - 3ab^2$

$ib^2 - 3a^2 i + 3ab \overset{?}{=} i^3 b^2 + 3a^2 i - 3ab$ F

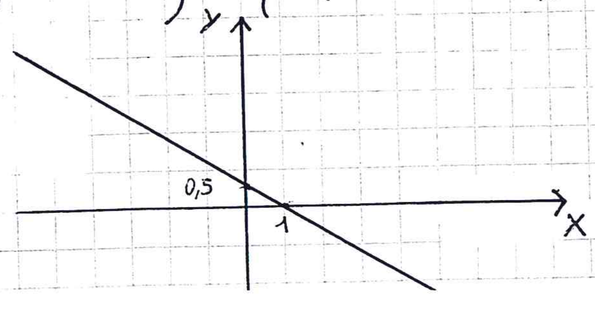
9) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y-1=0 \right\}$ è un sottospazio vettoriale?

$2y = 1-x \quad y = \frac{1-x}{2}$

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1-x}{2} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$x = 1 \quad y = 0$

$x = 0 \quad y = \frac{1}{2}$



La proposizione è V poiché la retta non passa
per l'origine, quindi non crea lo spazio $\mathbb{R}^2$ ma è lo
span di un vettore di $\mathbb{R}^2$. Se non ci fosse stato il t.n.
sarebbe stato vero ma poiché c'è è F poiché non è un'AL.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad F$$

$$\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$A\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -7 \\ -3x_1 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Span}(V_1, V_2) = \left\{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \text{ A.L.}$$

sist A ha sol. $\iff \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

mi chiedo se esistono λ_1, λ_2 t.c.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -7 \\ -3\lambda_1 = -3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{SCAMBIO II E III}}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -7 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + 0\lambda_2 = -3 \end{cases} \xrightarrow{\text{III} + \text{I} + \text{II}} \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -7 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 0 + 5\lambda_2 = -10 \end{cases} \xrightarrow{\text{II} - 2\text{I}}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -7 \\ 0 - 7\lambda_2 = +14 \\ 0 + 5\lambda_2 = -10 \end{cases} \xrightarrow{\text{III} \cdot \frac{7}{5}} \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -7 \\ 0 - 7\lambda_2 = 14 \\ 0 + 7\lambda_2 = -14 \end{cases} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = -7 \\ 0 \quad - 7\lambda_2 = 14 \\ 0 \quad\; 0 \quad = -28 \end{cases} \longrightarrow \text{IMPOSSIBILE} \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A) Trova l'inverso di A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B = inversa dx e sx

$$\underset{3\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 3}{B} = \underset{3\times 3}{I}$$

METODO GAUSS-JORDAN

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II + I;\, III - 2I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III - 6II}$$

(the left block is labelled A and the right block I)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & -6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III \cdot \frac{1}{3} II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{8}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{II - III}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+\frac{8}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{8}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{I + 3II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \end{array}\right)$$

20/11/18

Sottospazio = essere lo Span di un po' di vettori

Def. 1 $W \subseteq \mathbb{R}^n$ e' un sottospazio se $\exists\, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ t.c.
$W = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$

Def. 2 (ufficiale): $W \subseteq \mathbb{R}^n$ e' un sottospazio se

(i) $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$

(ii) $v \in W \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in W$

Def. 1 $\Rightarrow$ Def. 2 (lo dimostro con un esempio)

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{e' un sottospazio vettoriale}$$

PIANO DI $\mathbb{R}^3$ CHE CONTIENE $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ E L'ORIGINE

Verifichiamo che W soddisfa (i) e (ii)

Siano $v_1, v_2 \in W$, voglio verificare che anche $v_1 + v_2 \in W$

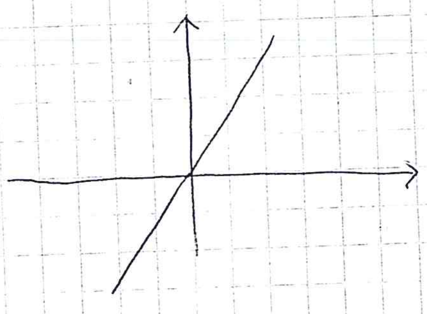
$$v_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 + v_2 = (\lambda_1 + \mu_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + (\lambda_2 + \mu_2) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(i) verificata}$$

$$\text{Se } v = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda v = \lambda \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \mu_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii) verificata}$$

ESEMPI

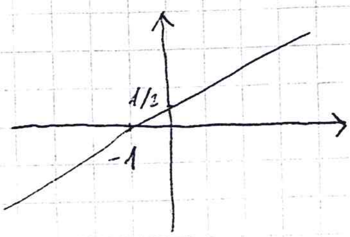
1)
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x - 4y = 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{4}x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \underset{=}{} \; y = \frac{3}{4}x$$
$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow$ SOTTOSPAZIO (di "dimensione 1")

2) non esempio

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+2y-1=0\right\}$$



n e' un sottospazio vettoriale,

n e' lo Span di nessuno,

e (ii) non valgono.

$v_1=\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$ $\quad v_1+v_2=\begin{pmatrix}-1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\notin W$ Quindi (i) <u>non</u> vale, W <u>non</u> e' un sottospazio

$v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad 2v_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\notin W$ Quindi (ii) <u>non</u> vale.

<u>N.B.</u> $\boxed{\text{Se ho un'A.L. } f_A,\ f_A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0?}$ $\longrightarrow$ RICORDA

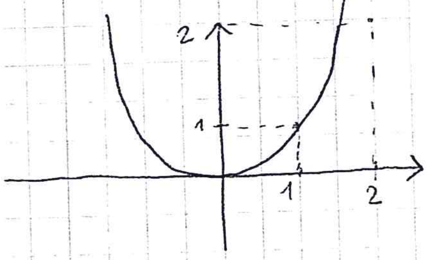
e W e' un sottospazio allora $\underset{\text{vettore } 0}{0} \in W$

$= 0\cdot v_1+\dots+0\cdot v_k\in \text{Span}\{v_1,\dots,v_k\}$ Quindi $0\in W$

rendo $v\in W$; per (ii) dove $\lambda=0$ $\quad 0=0\cdot v\in W$

Se non passa per l'origine <u>non</u> e' un sottospazio

$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \;\middle|\; y=x^2\right\}$ <u>non</u> e' un sottospazio (nonostante passi per l'origine)



lo dimostro con (i) e (ii)

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in W \quad 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\notin W$

$\Rightarrow$ (ii) non vale

$\to$ 3 vettori di $\mathbb{R}^3$

$W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\+1\end{pmatrix}\right\}$

I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ possono essere di 4 tipi:

- DIMENSIONE ZERO $\quad W = \{0\} \to$ punto
- DIMENSIONE UNO $\to$ rette per l'origine
- " DUE $\to$ piani per l'origine
- " TRE $\to$ tutto $\mathbb{R}^3$

- esempio banale di sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è $\mathbb{R}^n = \text{Span}\{e_1, \dots e_n\}$

Che "dimensione" ha W?

Osserviamo che $\begin{pmatrix}0\\-3\\+1\end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$,

infatti $\begin{pmatrix}0\\-3\\+1\end{pmatrix} = \underset{= \bar{\lambda}_1}{1} \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} \underset{= \bar{\lambda}_2}{-2} \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Quindi posso concludere che $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\+1\end{pmatrix}\right\} =$

$= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\} \to$ È UN INSIEME DI GENERATORI DI W

- $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$ È UN INSIEME DI GENERATORI DI W (significa che sono sufficienti per generare tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$).

BASE

Def. Una BASE di un sottospazio W è un insieme minimale di generatori che ha il n° minimo di elementi; questo numero si chiama DIMENSIONE di W.

Nell'esempio precedente la base è l'insieme $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

minimale = "io ho il mio insieme e non posso restringerlo"

$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ = base di dimensione 2 (contiene 2 elementi).

EDREMO CHE:

gni sottospazio ha TANTE BASI, ma tutte le basi hanno mpre lo stesso numero di elementi.

sempio: $\mathbb{R}^2$ = BASE CANONICA

$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ e' una base perche':

se faccio lo $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$, cioe' e' un insieme i generatori.

ha il numero minimo di vettori. Infatti $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ non genera $\mathbb{R}^2$

pan $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ = asse x $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ = asse y $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ non genera $\mathbb{R}^2$

sempio: $B = \left\{\overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}}\right\}$ e' una base? $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

il $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\} = ?$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right\} \iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \text{ t.c. } \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

cioe' se $\begin{cases}\lambda_1 - \lambda_2 = b_1\\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = b_2\end{cases}$ ha soluzione.

$\det\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{pmatrix} = 4 + 2 \neq 0$, quindi ha soluzione $\forall$ vettore $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

$\Downarrow$

B e' una base

Visto che un solo vettore non genera, B e' una base.

$W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$

Che dimensione ha?

Osserviamo che $\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

Infatti $\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Adesso $B = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ è diventata una base di W.

Infatti $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ <u>non</u> sono uno multiplo dell'altro, e quindi non posso più togliere altri vettori e rimanere con un insieme di generatori.

ESEMPI IMPORTANTI

① $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ A.L.

- $\text{Ker} f$ è un sottospazio → faccio la verifica:

$\boxed{(i)}$ se $v_1, v_2 \in \text{Ker} f$ allora devo mostrare che anche $v_1 + v_2 \in \text{Ker} f$

Per ipotesi $f(v_1) = 0$ e $f(v_2) = 0$.

Quindi $f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$ (i) è verificata

per le proprietà delle A.L.

$\boxed{(ii)}$ se $v \in \text{Ker} f$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora anche $\lambda v \in \text{Ker} f$.

Per ipotesi $f(v) = 0$.

Quindi $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot 0 = 0$ (ii) è verificata

$\Downarrow$

$\text{Ker} f$ è un sottospazio

TEOREMA (di solito lo chiede all'orale)

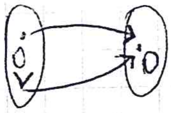
$:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ A.L.

significa che "in zero ci va solo zero"

e' iniettiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

M. $\Rightarrow$ "contropositiva" $P \Rightarrow Q$ $\neg Q \Rightarrow \neg P$

$\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$ allora $\exists\, v \neq 0$ t.c. $v \in \mathrm{Ker} f$, cioe' $f(v) = 0$

allora abbiamo che $f(v) = f(0) = 0$ e quindi f non e' iettiva  .

M. $\Leftarrow$ Devo dimostrare che vale l'implicazione

$f(v) = f(w) \Rightarrow v = w$ ($\Rightarrow f$ e' iniettiva)

$f(v) - f(w) = 0 = f(v-w) \Rightarrow v - w \in \mathrm{Ker} f \overset{\text{per ipotesi}}{=} \{0\}$

$\Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w \Rightarrow$ la f e' iniettiva.

orrezione esercitazione 19/11/13

$N(A \cdot B) \supseteq N(B)$ V o F?

$N(A) = \{\vec{x} \mid A\vec{x} = 0\}$

$A_{m \times m}$

$f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ A.L.

$\mathrm{Ker} f_A = N(A)$

Per la matrice corrispondente all'AL, si parla di spazio nullo N.

$\mathrm{Ker}(f_A \circ f_B) \supseteq \mathrm{Ker} f_B$

evo dimostrare che se $\vec{v} \in \mathrm{Ker} f_B$ allora $\mathrm{Ker}(f_A \circ f_B)$.

er ipotesi $f_B(\vec{v}) = 0$. Ma allora anche $f_A(f_B(\vec{v})) = f_A(0) = 0 \to$ perche' e' un'AL.

uindi $\vec{v} \in \mathrm{Ker}(f_A \circ f_B)$

Se $B\vec{x} = 0$ $AB\vec{x} = ? = A \cdot 0 = 0$

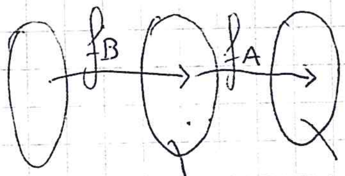
4) $A = \left(v_1 | \cdots | v_m\right)_{n \times m}$

$\mathrm{Col}(A) \overset{def}{=} \mathrm{Span}\{v_1, \dots v_m\}$

Se $f_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e' l'AL corrispondente alla matrice A, allora $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Im}(f_A)$

$\mathrm{Col}(A \cdot B) \supseteq \mathrm{Col}(B)$ V o F? stessa cosa

$\mathrm{Im}(f_A \circ f_B) \supseteq \mathrm{Im}(f_B)$ mi sto chiedendo se $\mathrm{Im}(f_A \circ f_B)$ include o meno $\mathrm{Im}(f_B)$.

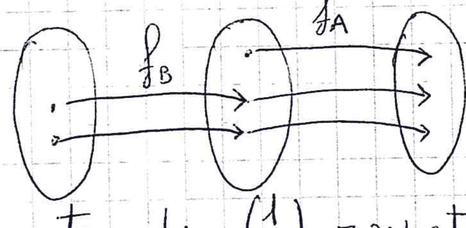


$\mathrm{Im}(f_A \circ f_B)$ $\Rightarrow$ F (la domanda non ha senso)

$\mathrm{Im}(f_B)$

$\mathrm{Im}(f_A \circ f_B) \overset{?}{\supseteq} \mathrm{Im}(f_A)$ È vero che $\mathrm{Im}(f_A)$ e' un sottoinsieme della composizione? NO

quello che e' vero e' $\underbrace{\mathrm{Im}(f_A \circ f_B)}_{} \subseteq \mathrm{Im}(f_A)$ → e' un sottoinsieme dell' $\mathrm{Im}(f_A)$



D) Coordinate di $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ rispetto alla base

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} \right\}$.

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ generano perche' $\forall$ scelta possibile $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ trovo λ_1, λ_2 t.c. $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, cioe' il sistema

$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = b_1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 = b_2 \end{cases}$ ha soluzione (CRAMER) $\det \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & -3\end{pmatrix} \neq 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 = 5 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}} = \frac{-3+5}{-3+1} = -1$$

$$\lambda_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}} = \frac{5-1}{-3+1} = -2$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Infatti $-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

CONCETTO DI CAMBIO DI COORDINATE

22/11/18

BASE

ef. $\underset{\underset{\text{un insieme di vettori}}{=}}{\mathcal{B}}$ e' una base del sottospazio W : proprietà 1 e 2

$\operatorname{Span} \mathcal{B} = W$ (i vettori di $\mathcal{B}$ generano W)

$\mathcal{B}$ e' un insieme indipendente, cioè

$\forall v \in \mathcal{B}$ $\quad v \notin \operatorname{Span}(\mathcal{B} - \{v\})$, cioè v e' INDIPENDENTE dagli altri vettori di $\mathcal{B}$ (non lo trovo a partire da altri vettori di $\mathcal{B}$).

esempio: $\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$ $\quad v_3 = v_1 + v_2 \Rightarrow v_3$ e' superfluo

$v_3 \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\downarrow$

Tra 2 vettori ce n'e' uno superfluo solo quando sono uno multiplo dell'altro.

- esempio: <u>$\mathcal{B}$ e' un insieme indipendente?</u>

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$$ ← MODO 1 (ricordo)

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\overset{?}{\in}\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$ SI

b) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\overset{?}{\in}\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$

c) $\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\overset{?}{\in}\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

. verifico

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\in\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}\iff\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$, cioè:

esistono soluzioni del sistema $\begin{cases}\lambda_1 = 2\\ \lambda_1-3\lambda_2=-1\\ 2\lambda_1+\lambda_2=5\end{cases}$?

MATRICE ASSOCIATA

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\1&-3&-1\\2&1&5\end{array}\right)\xrightarrow{II-I;\ III-2I}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&-3&-3\\0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{SCAMBIO } II \text{ e } III}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&1\\0&-3&-3\end{array}\right)$$

3X2 → 2 incognite
↓
3 eq.

SE UNA MATRICE $A_{m\times n}$ CON $m>n$, ALLORA LA SUA RIDOTTA R HA L'ULTIMA RIGA TUTTA DI ZERI (A NON HA INVERSA DESTRA)

$$\xrightarrow{III+3II}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\begin{cases}\lambda_1=2\\ \lambda_2=1\\ 0=0\end{cases}$$

Quindi $\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\in\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$

quindi <u>$\mathcal{B}$ non e' indipendente</u> $\Rightarrow$ <u>$\mathcal{B}$ non sarà mai una base.</u>

Teorema

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é indipendente $\Leftrightarrow$

" $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ " (<u>v_1, v_2 sono linearmente indipendenti</u>) $\Downarrow$ <u>"mi servono tutti"</u>

$\circledast$

...riete (vedi dietro)

~

...sempio:

" $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ "

$-1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma non tutti i λ sono zero quindi i vettori <u>non</u> sono indipendenti.

~

<u>...IM. TEOREMA</u>

$\Leftarrow$ "contropositiva"

<u>Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ NON é indipendente, allora esiste</u>

<u>$v_i \in \text{Span}$</u> $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

cioé $v_i = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots \mu_n v_n \Rightarrow$

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} - 1 v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_n v_n = 0$$

<u>N.B.</u> non tutti i coefficienti sono 0, quindi $\circledast$ non vale.

$\Rightarrow$ "contropositiva"

Se $\circledast$ non vale, allora $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ dove non tutti i $\lambda_i = 0$.

Per esempio supponiamo $\lambda_1 \neq 0$.

Dividendo tutto per λ_1 ed otteniamo:

$$v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n$$

$\in \mathrm{Span}\{v_2, \dots, v_n\}$, quindi $\mathcal{B}$ non e' indipendente.

[C.V.D.]

ESERCIZIO (RICORDA)

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 3y - z = 0 \right\}$$

1) È un sottospazio?

$\boxed{a}$ $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$

$\boxed{b}$ $v \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in W$

} MODO DI VERIFICARE SE W È UN SOTTOSPAZIO.

• verifico a : $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

supponiamo $v_1, v_2 \in W$ (Y)

vogliamo verificare se $v_1 + v_2 \in W$

Dire che $v_1 \in W$ significa che $x_1 + 3y_1 - z_1 = 0$

Dire che $v_2 \in W$ significa che $x_2 + 3y_2 - z_2 = 0$

esempio con i numeri $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in W$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 \in W$$

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \in W \iff x_1 + x_2 + 3(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0$$

$$x_1 + x_2 + 3y_1 + 3y_2 - z_1 - z_2 \overset{?}{=} 0 =$$

$= 0 \qquad = 0$

$$= (x_1 + 3y_1 - z_1) + (x_2 + 3y_2 - z_2) = 0$$

• verifico b :

$v_1 \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v_1 \in W$

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in W$ significa $x_1 + 3y_1 - z_1 = 0$

$\lambda v_1 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda z_1 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} W$. Devo verificare se è vero o

no che $(\lambda x_1) + 3(\lambda y_1) - (\lambda z_1) \overset{?}{=} 0$

$$\lambda \underbrace{(x_1 + 3y_1 - z_1)}_{0} = 0 \quad \text{ok}$$

nclusione:

tti gli insiemi del tipo $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| ax + by + cz = 0 \right\}$, ove $a, b, c \in \mathbb{R}$), sono sottospazi. (La dim. è del tutto mile a quella appena vista).

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \middle| 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 0 \right\}$ è un SOTTOSPAZIO

eq. lineare $= 0$

$f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^1$

$= $ combinazione lineare di vettori di $\mathbb{R}^1$ (cioè di numeri).

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \longrightarrow (3)x_1 (-2)x_2 + (5)x_3 - x_4 + x_5$ A.L.

$\boxed{\ker f = W}$

---

piano$_1$ $\cap$ piano$_2$ = retta

piano$_1$ $\cap$ piano$_2$ $\cap$ piano$_3$ = punto

sist. di 3 eq. e 3 incognite $\to$ 1 SOLA SOL.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + 3y - z = 0 \right\}$ = SOTTOSPAZIO

RICORDA

(COME SI TROVA LA $\mathcal{B}$ DI UN SOTTOSPAZIO)

Voglio trovare la $\mathcal{B}$ di W

ANTICIPO DI UN TEOREMA:
Ogni sottospazio ha una base (in realtà tante basi) ⊛

⊛ Inoltre tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi, e quel numero si chiama DIMENSIONE del sottospazio.

$\mathcal{B}$ = insieme indipendente di generatori

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$; $v_1, \dots, v_n$ indipendenti

$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\} = W$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$ base $\overbrace{\text{di } \mathbb{R}^3}^{\text{canonica}}$, non è una base di W

↓

è un insieme indipendente?

1° modo $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

"voglio che faccia $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$"

$\mathcal{B} \rightarrow$ la base canonica è un insieme indipendente.

2° modo

$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$ ogni vettore di questo Span ha la 1ª coordinata $0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}\{\dots\}$

N.B. Ogni base $\mathcal{B} \subseteq W$

$\cancel{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$ DA SOLO QUESTO VETTORE NON GENERA TUTTO W

Osserviamo che $\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ trovo tutti e soli i vettori con coordinate $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix}$. Ma ci sono vettori di W che non sono di questo tipo, ad esempio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

$\cancel{\mathcal{B}} = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}} \right\}$ $\qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di W? →

superfluo $\Rightarrow v_1, v_2$ non sono indipendenti

$\mathcal{B}$ è una base se:

genera

è un insieme indipendente ✓ $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \text{NON SONO UNO MULTIPLO DELL'ALTRO}\right)$

$$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \overset{?}{=} W$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \overset{?}{\in} W$$

SI perché è un sottospazio ($\in W$ per le proprietà di sottospazio).

<u>...esta da vedere che ogni vettore v di W appartiene ...span $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, cioè che esistono λ_1, λ_2 t.c. $v = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$</u>

$v \in W \qquad v = \begin{pmatrix}x\\y\\x+3y\end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix}a\\b\\a+3b\end{pmatrix}$

...è vero o no che posso sempre trovare λ_1, λ_2 t.c.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\a+3b\end{pmatrix}, \text{ cioè } \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = a\\ \lambda_1 = b\\ 4\lambda_1 + \lambda_2 = \underbrace{a+3b}_{\text{parametri}}\end{cases}$$

$\lambda_1 = b$

$\lambda_2 = a - b$

$4\lambda_1 + \lambda_2 \overset{?}{=} a + 3b$

$4b + a - b = a + 3b \qquad$ OK

...qualunque vettore v io prenda di W, della forma $\begin{pmatrix}x\\y\\x+3y\end{pmatrix}$,

<u>... $= \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una BASE di W!</u>

esercizio

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 2x - 4z + t = 0 \right\}$$

↓

iperpiano dentro $\mathbb{R}^4$ con dimensione 3

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$v_1 \in W$ $\quad v_2 \in W$ $\quad v_3 \in W$

mi garantisce che $v_3 \notin \text{Span}\{v_1, v_2\}$

è superfluo, sta nello $\text{Span}\{v_1, v_2\}$

↓

da solo genera una retta

26/11/18

- se A è una matrice $n \times m$ dove $n > m$, allora A <u>non</u> ha inversa destra. (B ha una riga tutta di zeri dopo le mosse di Gauss, quindi $A \cdot B$ non farà mai I).

- se A è una matrice $n \times m$ dove $n < m$ allora A <u>non</u> ha inversa sinistra. $\underbrace{(\;\text{+++}\;)}_{m \text{ colonne}}\} n$ righe

DIM. Supponiamo che A abbia inversa sx, cioè che esista B t.c. $\underset{m \times n}{B} \cdot \underset{n \times m}{A} = \underset{m \times m}{I}$ — matrice quadrata. ma allora A è inversa destra di B e quindi B deve avere un numero di righe $(m) \leq$ numero colonne (n), cioè $m \leq n$

esempio: $A_{5 \times 7}$

se $B \cdot A = I$, allora $B_{7 \times 5}$ avrebbe inversa dx ma questo non può succedere.

<u>CONCLUSIONE:</u> se A è una matrice <u>invertibile</u> (cioè esiste B t.c. $B \cdot A = I$ e $A \cdot B = I$), allora $n = m$

TEOREMA: tutte le basi di un sottospazio hanno lo stesso numero di elementi, che si chiama dimensione.

empio $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{E} = \left\{ e_1, e_2, e_3 \right\}$
(1)
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$B = \left\{ V_1, V_2, V_3, V_4 \right\}$ quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ non formano MAI una base
rché B non può mai essere un insieme di vettori linearmente indipendenti.

$$\underbrace{\left(V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \middle| V_4 \right)}_{A_{3\times 4}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix}}_{V\in\mathbb{R}^4} = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 + \lambda_4 V_4 = 0$$
$$\Downarrow \text{(linearm. ind.)}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

bbiamo dimostrato che se $A \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\\\lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$,

oè $N(A) = \{0\} \xrightarrow{\text{equivalente}} \operatorname{Ker} f_A = \{0\} \Leftrightarrow f_A$ è iniettiva
$\Rightarrow$ A ha inversa sinistra e questo è assurdo perché
A ha più colonne che righe ($n<m$).

empio (2) $B = \left\{ V_1, V_2 \right\}$ due vettori di $\mathbb{R}^3$ non formano MAI una base.

$$\underset{3\times 2}{B} = \left(V_1 \middle| V_2 \right)$$

e per assurdo $B = \{V_1, V_2\}$ fosse una base, allora
dovrebbe generare tutto $\mathbb{R}^3$.
Vediamo che questo non è possibile:
infatti, se $B = \{V_1, V_2\}$ generasse tutto $\mathbb{R}^3$, allora

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{V_1, V_2\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{V_1, V_2\right\} \Leftrightarrow \text{esistono } \lambda_1, \lambda_2 \text{ t.c. } \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{V_1, V_2\right\} \Leftrightarrow \text{esistono } \mu_1, \mu_2 \text{ t.c. } \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in Span\{V_1, V_2\} \iff$ esistono τ_1, τ_2 t.c. $\tau_1 V_1 + \tau_2 V_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\left(V_1 \middle| V_2\right)}_{A}{}_{3\times2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & \tau_1\\ \lambda_2 & \mu_2 & \tau_2\end{pmatrix}_{2\times3}}_{B} = \left(A\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix} \middle| A\begin{pmatrix}\tau_1\\\tau_2\end{pmatrix}\right)_{3\times3} =$$

$$= \left(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 \middle| \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 \middle| \tau_1 V_1 + \tau_2 V_2\right) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$A_{3\times2} \rightarrow$ NON PUO' AVERE INVERSA DX

$B_{2\times3} \rightarrow$ " " " " SX

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \notin Span\{V_1, V_2\} \Rightarrow \mathcal{B} = \{V_1, V_2\}$ NON e' una base.

RIASSUNTO

$A = \left(V_1 \middle| \dots \middle| V_m\right)$

- Se $\{V_1, \dots, V_m\}$ generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$, allora A ha inversa dx e f_A e' suriettiva $\Rightarrow m \geq n$
- Se $\{V_1, \dots V_m\}$ e' un insieme indipendente, allora A ha inversa sx $\Rightarrow m \leq n$

Conclusione: tutte le basi di $\mathbb{R}^n$ hanno n elementi.

NUMERI COMPLESSI:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^{a+ib} = e^{a} \cdot e^{ib}$$

$$e^{ib} = 1 + ib + \frac{(ib)^2}{2!} + \frac{(ib)^3}{3!} + \frac{(ib)^4}{4!} + \dots$$

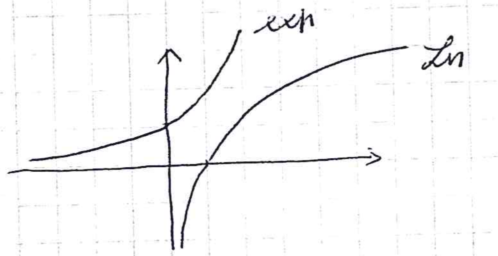
$$= 1 + ib - \frac{b^2}{2!} - \frac{ib^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{ib^5}{5!} - \frac{b^6}{6!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots\right) + i\left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \dots\right) =$$

$$= \cos b + i \operatorname{sen} b$$

$e^{a+ib} \overset{def.}{=} \underbrace{e^{a}}_{\text{MODULO}}(\cos b + i \operatorname{sen} b) \rightarrow$ DEF. DI EULERO DELL'ESPONENZIALE

$exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$



onotone crescente, iniettiva,

m $exp = \mathbb{R}^+$ $\nwarrow$ exp

$exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$Ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

exp è iniettiva nei numeri $\mathbb{C}$? <u>NO</u>

$e^{\pi i} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$ $\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}$

$e^{3\pi i} = \cos 3\pi + i \operatorname{sen} 3\pi = -1$

) exp è suriettiva nei numeri $\mathbb{C}$?

$e^{z} = i$ $\quad z = a + ib \quad e^{z} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b) \overset{?}{=} i$

con $b = \frac{\pi}{2}$ e $a = 0$ $\quad e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b) = i$

$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} i$

e^{a+ib} che modulo ρ e che argomento θ ha?

esempio: $e^{2+5i} = e^{2} \cdot (\underbrace{\cos 5 + i \operatorname{sen} 5}_{\text{in radianti}}) =$

$e^{2}\cos 5 + e^{2} i \operatorname{sen} 5$

$$\rho = \sqrt{(e^2\cos 5)^2 + (e^2 \operatorname{sen} 5)^2} = \sqrt{e^4\cos^2 5 + e^4 \operatorname{sen}^2 5} = \sqrt{e^4(\cos^2 5 + \operatorname{sen}^2 5)} =$$

$$= e^2$$

$$\theta = 5$$